Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 03 - Data 25/03/2013

NÍVEL I

Num dado momento, dois relógios comuns, que marcam de 0 a 12 horas, indicam a mesma hora. Sabe-se que um deles adianta um segundo por cada hora e o outro adianta três segundos a cada duas horas.

Em quantos dias os relógios voltarão a marcar, simultaneamente, a hora correta?

SOLUÇÃO

A resposta é 3600 dias. O primeiro relógio adianta 12 horas em $12 \times 60 \times 60$ horas. Ou seja, o primeiro relógio adianta 12 horas em 1800 dias, que é a primeira vez que ele voltará a marcar corretamente as horas. O segundo relógio adiantará 12 horas em $12 \times 60 \times (60 \times (\frac{2}{3}))$. Ou seja, o segundo relógio adianta 12 horas em 1200 dias, que é primeira vez que ele voltará a marcar as horas corretamente. No fim de $MMC(1800, 1200) = 3600$ dias os dois relógio marcarão, simultaneamente, a hora correta.

NÍVEL II

Um barril, A, contém m galões de vinho e n galões de água. Outro barril, B, contém p galões de vinho e q galões de água.

Quantos galões tem de ser retirados de cada barril para outro barril, C, de modo que produza aí, pela mistura deles, b galões de vinho e c galões de água?

SOLUÇÃO

Seja x o número de galões retirados do barril A e y onúmero degalões retirados do barril B. Assim, $x + y = b + c$. (Equação (*))

Logo, o número de galões de vinho retirados do barril A satisfaz a igualdade: $\frac{m+n}{x} = \frac{m}{\frac{mx}{m+n}}$ e

o número de galões de vinho retirados do barril B satisfaz a igualdade: $\frac{p+q}{y} = \frac{p}{\frac{py}{p+q}}$. (Equação (**))

Portanto, $\frac{mx}{m+n} + \frac{py}{p+q} = b$. Da Equação (*), temos que $y = b + c - x$. Substituindo na Equação (**),temos: $\frac{mx}{m+n} = \frac{p(b+c-x)}{p+q} = b$.

Explicitando o valor de x, temos $x = \frac{(m+n)(bq-pc)}{mq-np}$, o que acarreta $y = \frac{(p+q)(mc-nb}{mq-np}$

NÍVEL III

Prove que não existe função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(f(x)) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$

SOLUÇÃO

Suponha que tal função existe. Como $f(f(x)) = x + 1$,temos que $f(f(f(x))) = f(x + 1)$. Por outro lado, $f(f(f(x))) = f(x) + 1$. Deste modo, podemos concluir que $f(x + 1) = f(x) + 1$. Agora, por indução, podemos obter que $f(x + n) = f(x) + n$, para todo $x \in N$. Daí, também temos que $f(x) = f(x - n + n) = f(x - n) + n$. Ou seja, $f(x - n) = f(x) - n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $f(x + y) = f(x) + y$, para todo $y \in \mathbb{Z}$. Agora, fazendo $x = 0$, temos $f(y) = f(0) + y$. Nesta última igualdade, fazendo $y = f(0)$, temos $f(f(0)) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Mas, na equação original, fazendo $x = 0$, temos $f(f(0)) = 1$. Deste modo, somos levados a concluir que $2f(0) = 1$, que implica $f(0) \notin \mathbb{Z}$. Contradição. Portanto, não existe função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(f(x)) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre o valor da expressão:

$$K = \sqrt{4 + 27\sqrt{4 + 29\sqrt{4 + 31\sqrt{4 + 31\sqrt{4 + 33\sqrt{\cdots}}}}}}$$

SOLUÇÃO

A resposta é 29. Vamos chamar

$$K_n = \sqrt{4 + (2n-1)\sqrt{4 + (2n+1)\sqrt{4 + (2n+3)\sqrt{4 + (2n+5)\sqrt{\cdots}}}}}$$

É fácil ver que K_n satisfaz a relação de recorrência $K_n = \sqrt{4 + (2n-1)K_{n+1}}$ se, e somente se, $(K_n - 2).(K_n + 2) = (2n-1)K_{n+1}$

Testando, vemos que $K_n = 2n + 1$ é uma solução da recorrência. Agora, basta mostrar que $K_1 = 3$, para fazer a indução.

Para isso, seja $T_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 5\sqrt{\cdots\sqrt{(2n-3)\sqrt{4 + (2n-1)(2n+3)}}}}}}$

e

$$U_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 5\sqrt{\cdots\sqrt{4 + (2n-1)\sqrt{4 + (2n-1)\sqrt{(2n+3)}}}}}}} = 3$$

É fácil ver que $T_n \leq U_n = 3$. Portanto, usando o fato conhecido: se $B \geq A > 0$, então $\sqrt{\frac{(4+A)}{(4+B)}} \geq \sqrt{\frac{A}{B}}$, podemos concluir que:

$$1 \geq \frac{T_n}{3} = \frac{T_n}{U_n} = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 5\sqrt{\cdots\sqrt{4 + (2n-1)\sqrt{2n+3}}}}}}}{\sqrt{4 + \sqrt{4 + 3\sqrt{4 + 5\sqrt{\cdots\sqrt{4 + (2n-1)(2n+3)}}}}}} \geq$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\cdots + (2n-1)\sqrt{2n+3}}}}{\sqrt{\sqrt{\cdots + (2n-1)(2n+3)}}} \geq \cdots \geq \sqrt[2^{n+1}]{\frac{1}{2n+3}} = \frac{1}{(2n+3)^{(\frac{1}{2})^{n+1}}} = e^{-ln\frac{(2n+3)}{2^{n+1}}}$$

A última expressão acima, usando a Rgera de L'Hospital, nos dá $K_1 = \lim_{n\to\infty} T_n = 3$. Portanto, a expressão pedida é exatamente K_{14}, que é igual a 29.