Phi-Bonacci

Prof.Carlos A. Gomes

Departamento de Matemática,CCET - UFRN
cgmat@ccet.ufrn.br

- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.

- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).

- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- A sequência de Fibonacci

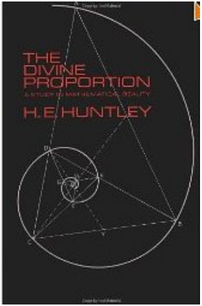
- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- A sequência de Fibonacci
- $\varphi-$Bonacci.

- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- A sequência de Fibonacci
- $\varphi-$Bonacci.
- $\varphi-$Bonacci e a natureza.

- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- A sequência de Fibonacci
- $\varphi-$Bonacci.
- $\varphi-$Bonacci e a natureza.
- Belos problemas e resultados interessantes $\cdots$

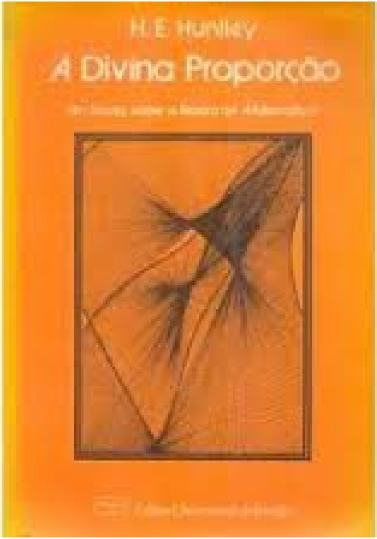
- Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro φ.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci).
- A sequência de Fibonacci
- $\varphi-$Bonacci.
- $\varphi-$Bonacci e a natureza.
- Belos problemas e resultados interessantes $\cdots$

Tendo lecionado Matemática e Física a estudantes de nível universitário durante trianta anos, acho-me ainda diante da dificuldade didática com que me defrontei quando comecei a lecionar, qual seja, como introduzir nas mentes adolescentes o melhor e talvez o único motivo permanente para se estudar Matemática, que em minha opinião, é o motivo estético.
(H. E. Huntley - A Divina Proporção - Um ensaio sobre a Beleza na Matemática).


THE
DIVINE
PROPORTION
H. E. HUNTLEY

- “O matemático não estuda a Matemática pura porque ela seja útil; ele a estuda porque deleita-se com ela, e deleita-se com ela porque ela é bela (H. Poincaré)".

- “O matemático não estuda a Matemática pura porque ela seja útil; ele a estuda porque deleita-se com ela, e deleita-se com ela porque ela é bela (H. Poincaré)".
- “Nenhum matemático pode ser um matemático completo a menos que tenha também algo de Poeta"(K. Weirstrass).


H. E. Huntley
A Divina Proporção

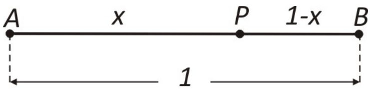
1. Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro.

2. A sequência de Fibonacci

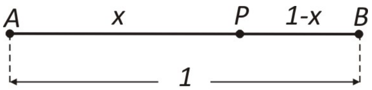
3. Belos problemas e resultados interessantes

- Divisão de um segmento em “média e extrema razão".

- Divisão de um segmento em “média e extrema razão".

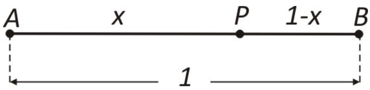


- Divisão de um segmento em "média e extrema razão".



$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \varphi \text{ (Razão áurea)}$$

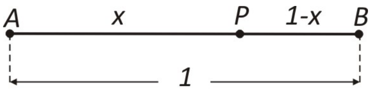
- Divisão de um segmento em “média e extrema razão".



$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \varphi \text{ (Razão áurea)}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

- Divisão de um segmento em “média e extrema razão".



$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \varphi \text{ (Razão áurea)}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (Número de ouro da geometria clássica)}$$

- Qual o valor de φ?

$$\varphi^2 = \frac{1}{x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \varphi$$

- Qual o valor de φ?

$$\varphi^2 = \frac{1}{x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \varphi$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (Razão áurea)}$$

- Qual o valor de φ?

$$\varphi^2 = \frac{1}{x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \varphi$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (Razão áurea)}$$

- Outras relações interessantes envolvendo o número φ.

- Qual o valor de φ?

$$\varphi^2 = \frac{1}{x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \varphi$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (Razão áurea)}$$

- Outras relações interessantes envolvendo o número φ.

$$\varphi^2 - \varphi = 1 \Rightarrow \varphi\left(\varphi - 1\right) = 1 \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

- Qual o valor de φ?

$$\varphi^2 = \frac{1}{x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + \varphi$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (Razão áurea)}$$

- Outras relações interessantes envolvendo o número φ.

$$\varphi^2 - \varphi = 1 \Rightarrow \varphi\,(\varphi - 1) = 1 \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1 + \varphi}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\varphi = \quad \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{1+\varphi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \end{aligned}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{1+\varphi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \end{aligned}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\begin{aligned}\varphi &= \sqrt{1+\varphi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}}\end{aligned}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{1+\varphi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

- $$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

- $$\begin{aligned}
\varphi &= \sqrt{1+\varphi} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}} \\
&\vdots \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

- Lembrando que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

- Lembrando que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

-

$$\varphi = \quad 1 + \tfrac{1}{\varphi}$$

- Lembrando que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

-

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} \end{aligned}$$

- Lembrando que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

- $$\begin{aligned} \varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} \end{aligned}$$

- Lembrando que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

-

$$\begin{aligned}
\varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Lembrando que

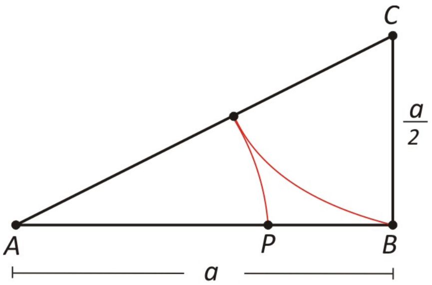
$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

-

$$\begin{aligned}
\varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} \\
&\vdots \\
&= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

- Como dividir um segmento dado em razão áurea?

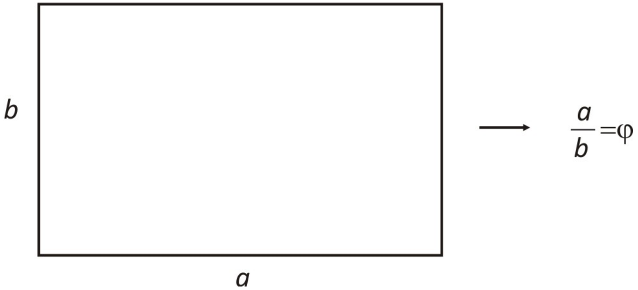
- Como dividir um segmento dado em razão áurea?



AP=segmento áureo de AB

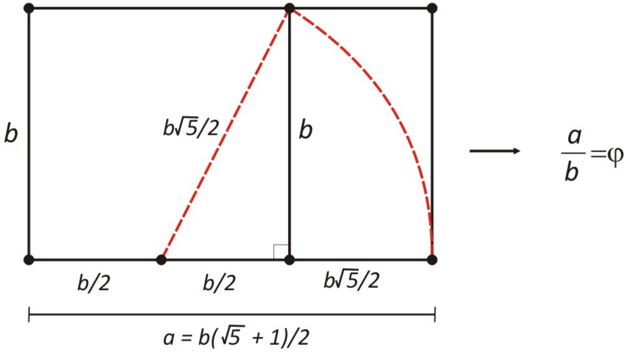
- Retângulo áureo

- Retângulo áureo



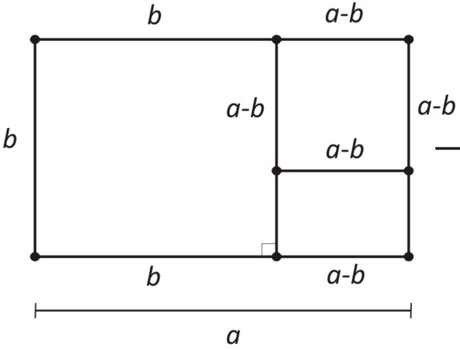
- Como construir um retângulo áureo

- Como construir um retângulo áureo



- Uma propriedade interessante do retângulo áureo

- Uma propriedade interessante do retângulo áureo



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \varphi$$

"Quando de um retângulo áureo você retira um quadrado cujo lado é o menor dos lados do retângulo original, o retângulo que resta ainda é um retângulo áureo.

De fato,

$$\frac{a}{b} = \varphi \Rightarrow a = b\varphi$$

De fato,

$$\frac{a}{b} = \varphi \Rightarrow a = b\varphi$$

Assim,

$$\frac{b}{a-b} = \frac{b}{b\varphi - b} = \frac{b}{b\left(\varphi - 1\right)} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi}{\underbrace{\varphi^2 - \varphi}_{=1}} = \varphi$$

De fato,

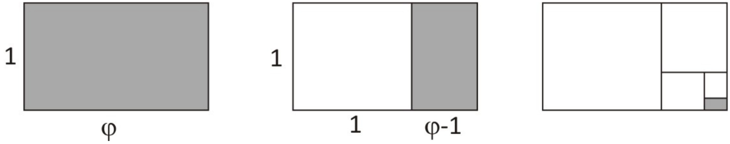
$$\frac{a}{b} = \varphi \Rightarrow a = b\varphi$$

Assim,

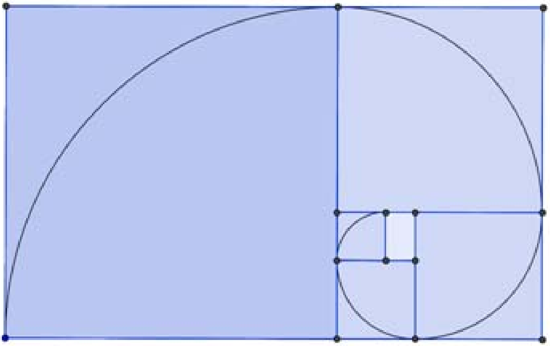
$$\frac{b}{a-b} = \frac{b}{b\varphi - b} = \frac{b}{b(\varphi - 1)} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi}{\underbrace{\varphi^2 - \varphi}_{=1}} = \varphi$$

Ora, como $\frac{b}{a-b} = \varphi$, segue que o retângulo menor também é áureo.

- Repretindo o mesmo processo com o novo retângulo áureo podemos obter um novo retângulo áureo e assim sucessivamente, conforme ilustra a figura a seguir:



Se ligarmos os vértices diametralmente opostos dos quadrados que foram construídos a partir de cortes apropriados (como foi sugerigo no slide anterior) um retângulo âureo por arcos de circunferência, obtermos a famosa figura (que é a logomarca oficial da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática)



Vale a pena comentar que a espiral apresentada na figura anterior não é de fato uma espiral logarítmica “honesta", ou seja, uma curva cuja a equação em coordenadas polares (ρ, θ), seja dada por:

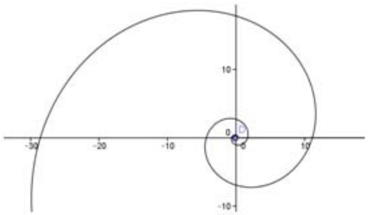
$$\rho = be^{a\theta}, \; a, b \in \mathbb{R}^+$$

cuja representação gráfica é mostrada a seguir (e não é a justaposição de arcos de circunferências!)

Vale a pena comentar que a espiral apresentada na figura anterior não é de fato uma espiral logarítmica “honesta", ou seja, uma curva cuja a equação em coordenadas polares (ρ, θ), seja dada por:

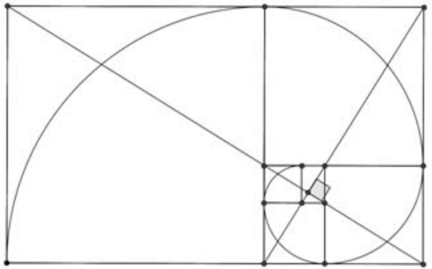
$$\rho = be^{a\theta}, \; a, b \in \mathbb{R}^+$$

cuja representação gráfica é mostrada a seguir (e não é a justaposição de arcos de circunferências!)

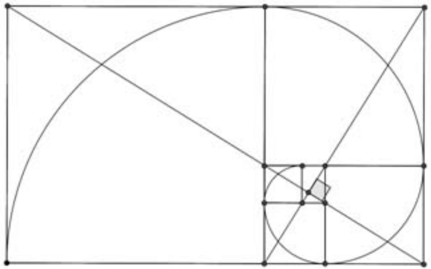


- Uma outra propriedade do retângulo áureo: Um diagonal do retângulo áureo original e uma diagonal do novo retângulo formado, quando do retângulo original retiramos um quadrado, são perpendiculares, conforme a ilusta a figura a seguir (por quê?)

- Uma outra propriedade do retângulo áureo: Um diagonal do retângulo áureo original e uma diagonal do novo retângulo formado, quando do retângulo original retiramos um quadrado, são perpendiculares, conforme a ilusta a figura a seguir (por quê?)



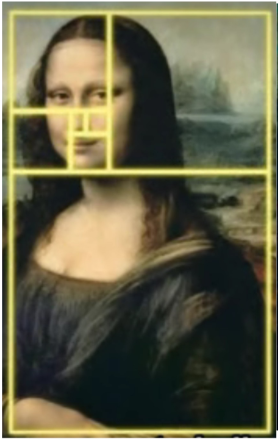
- Uma outra propriedade do retângulo áureo: Um diagonal do retângulo áureo original e uma diagonal do novo retângulo formado, quando do retângulo original retiramos um quadrado, são perpendiculares, conforme a ilusta a figura a seguir (por quê?)

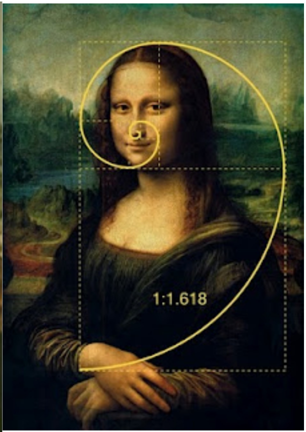


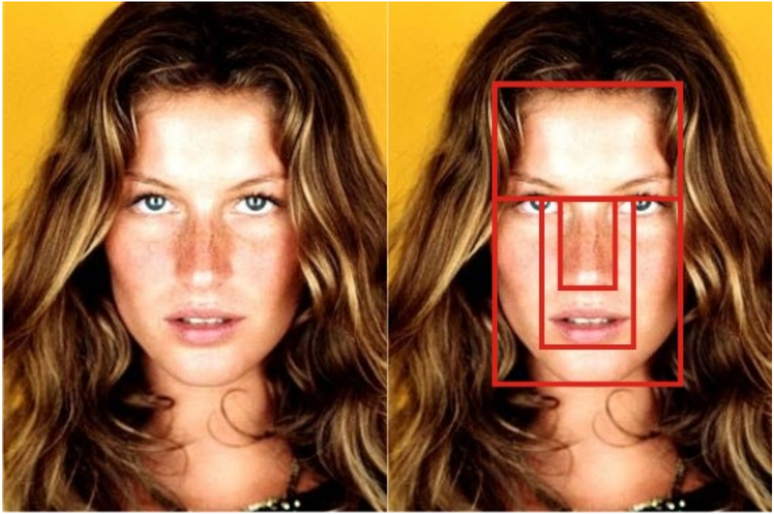
O ponto de interseção dessas diagonais é conhecido como “umbigo do mundo"ou “olho de Deus".

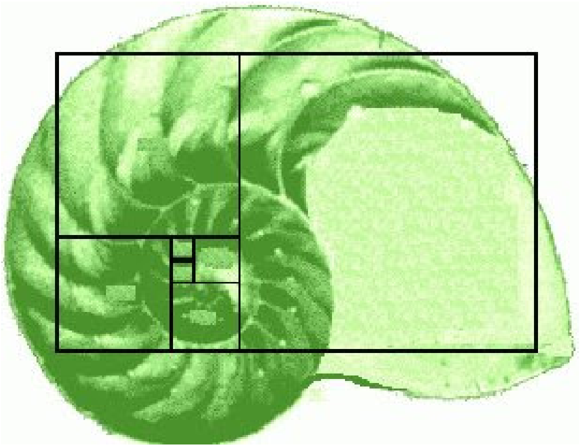
- Retângulos áureos espalhados pelo mundo.

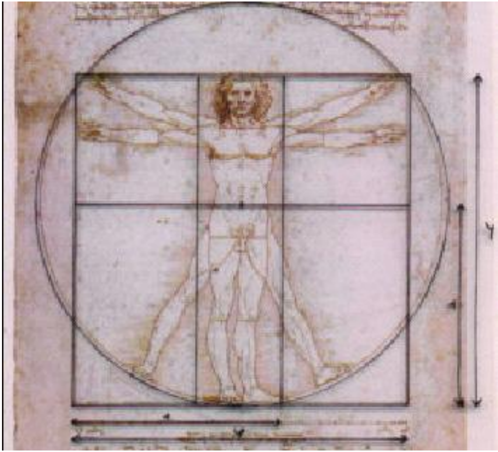
- Retângulos áureos espalhados pelo mundo.




1:1.618

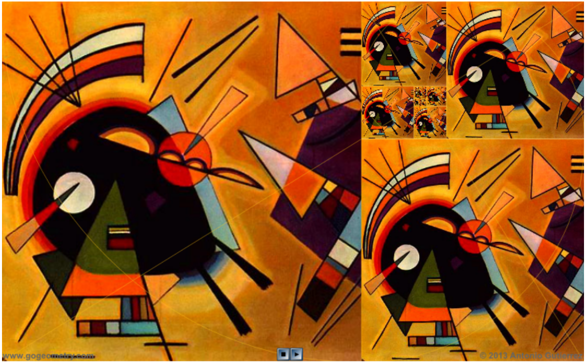


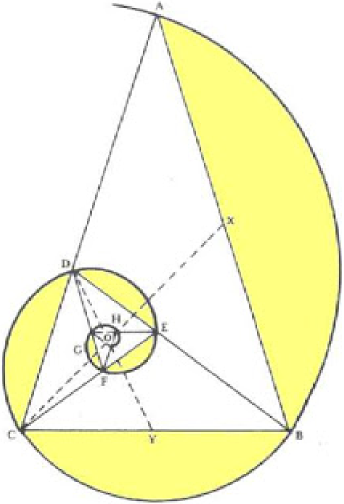


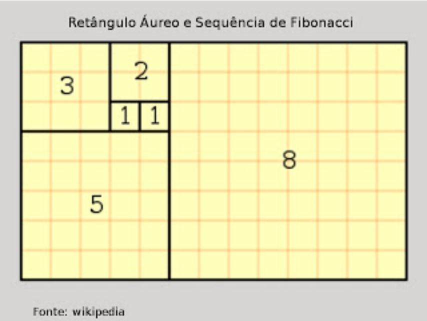


SBM

Sociedade Brasileira de Matemática




A
X
D
H
E
O
G
F
C
Y
B


Retângulo Áureo e Sequência de Fibonacci
3
2
1
1
5
8
Fonte: wikipedia

1. Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro.
2. A sequência de Fibonacci
3. Belos problemas e resultados interessantes

- Nasceu em Pisa (Itália) - 1175.

- Nasceu em Pisa (Itália) - 1175.
- Leonardo Fibonacci (diminutivo de fillius de Bonacci).

- Nasceu em Pisa (Itália) - 1175.
- Leonardo Fibonacci (diminutivo de fillius de Bonacci).
- Leonardo Bigollo (o viajante).

- Nasceu em Pisa (Itália) - 1175.
- Leonardo Fibonacci (diminutivo de fillius de Bonacci).
- Leonardo Bigollo (o viajante).
- Primeiros estudos de Matemática - Professores islâmicos.
- Retorna para a Itália em 1200 e escreve o seu primeiro livro.

Principais obras:

- Líber Abacci (livro de cálculo) - 1202: Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez do problema dos coelhos.

Principais obras:

- Líber Abacci (livro de cálculo) - 1202: Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez do problema dos coelhos.
- Pratica Geometricae - 1220: Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.

Principais obras:

- Líber Abacci (livro de cálculo) - 1202: Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez do problema dos coelhos.
- Pratica Geometricae - 1220: Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.
- Flos - 1225: Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II.

Principais obras:

- Líber Abacci (livro de cálculo) - 1202: Foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez do problema dos coelhos.
- Pratica Geometricae - 1220: Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.
- Flos - 1225: Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II.
- Liber quadratorum - 1225: É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

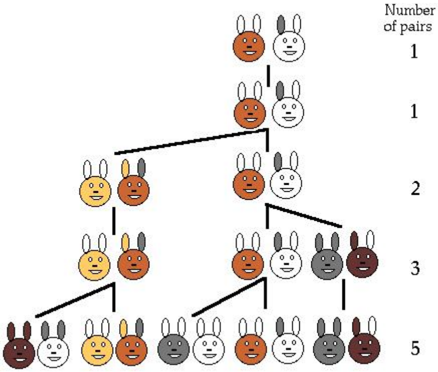
O PROBLEMA DA REPRODUÇÃO DOS COELHOS:

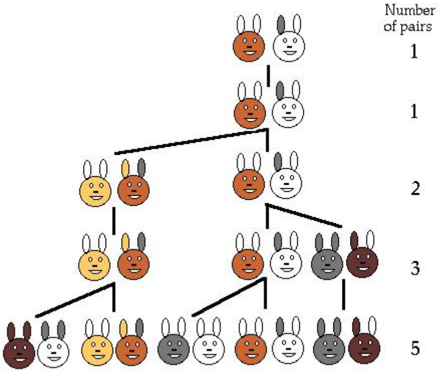
O PROBLEMA DA REPRODUÇÃO DOS COELHOS:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês e nenhum coelho morre durante o processo?

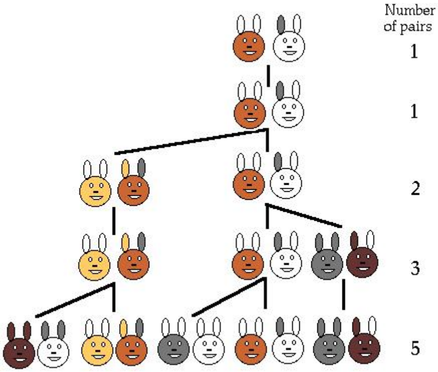
O PROBLEMA DA REPRODUÇÃO DOS COELHOS:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês e nenhum coelho morre durante o processo?


Number
of pairs
1
1
2
3
5



A sequência de Fibonacci:



A sequência de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

Definição

A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tal que* $f_1 = 1, f_2 = 1$ *e*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$$

é chamada de **sequência de Fibonacci***.*

Definição

A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *tal que* $f_1 = 1, f_2 = 1$ *e*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$$

é chamada de **sequência de Fibonacci**.

Teorema

O $n-$*ésimo termo da sequência de Fibonacci é dado por*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração:

Demonstração:

Sejam φ e φ' as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Assim,

Demonstração:

Sejam φ e φ' as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Assim,

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \ e \ \varphi'^2 = \varphi' + 1$$

Demonstração:

Sejam φ e φ' as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Assim,

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ } e \text{ } \varphi'^2 = \varphi' + 1$$

Multiplicando-se as igualdades acima por φ^n e φ'^n, segue que:

Demonstração:

Sejam φ e φ' as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Assim,

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \; e \; \varphi'^2 = \varphi' + 1$$

Multiplicando-se as igualdades acima por φ^n e φ'^n, segue que:

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \; e \; \varphi'^{n+2} = \varphi'^{n+1} + \varphi'^n$$

Demonstração:

Sejam φ e φ' as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Assim,

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \; e \; \varphi'^2 = \varphi' + 1$$

Multiplicando-se as igualdades acima por φ^n e φ'^n, segue que:

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \; e \; \varphi'^{n+2} = \varphi'^{n+1} + \varphi'^n$$

$$\frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$$

Definindo $x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$,

Definindo $x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$,

$$\frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^{n} - \varphi'^{n}}{\varphi - \varphi'}$$

Definindo $x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$,

$$\frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^{n} - \varphi'^{n}}{\varphi - \varphi'}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Definindo $x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$,

$$\frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^{n} - \varphi'^{n}}{\varphi - \varphi'}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Mas,

$$\varphi + \varphi' = 1 \ , \ \varphi.\varphi' = -1 \ e \ \varphi - \varphi' = \sqrt{5}$$

Definindo $x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$,

$$\frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^{n} - \varphi'^{n}}{\varphi - \varphi'}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Mas,

$$\varphi + \varphi' = 1 \ , \ \varphi.\varphi' = -1 \ e \ \varphi - \varphi' = \sqrt{5}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\varphi^1 - \varphi'^1}{\varphi - \varphi'} = 1 \ e \ x_2 = \frac{\varphi^2 - \varphi'^2}{\varphi - \varphi'} = 1$$

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci.

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci. Assim, para todo n natural,

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci. Assim, para todo n natural,

$$f_n = x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \quad \text{(Fórmula de Binet).}$$

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci. Assim, para todo n natural,

$$f_n = x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \text{ (Fórmula de Binet).}$$

Como φ e φ' são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, segue que:

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci. Assim, para todo n natural,

$$f_n = x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \text{ (Fórmula de Binet).}$$

Como φ e φ' são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, segue que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ e\ \varphi - \varphi' = \sqrt{5}$$

Portanto a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Fibonacci. Assim, para todo n natural,

$$f_n = x_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \text{ (Fórmula de Binet).}$$

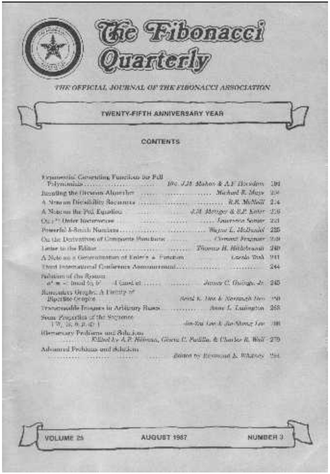
Como φ e φ' são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, segue que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ e\ \varphi - \varphi' = \sqrt{5}$$

Portanto,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Uma revista especializada em números de Fibonacci...


The Fibonacci Quarterly

THE OFFICIAL JOURNAL OF THE FIBONACCI ASSOCIATION

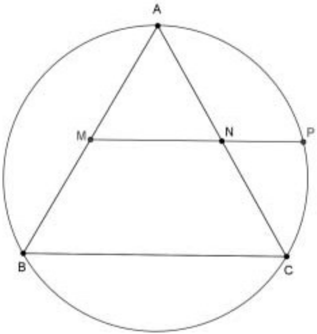
TWENTY-FIFTH ANNIVERSARY YEAR

CONTENTS

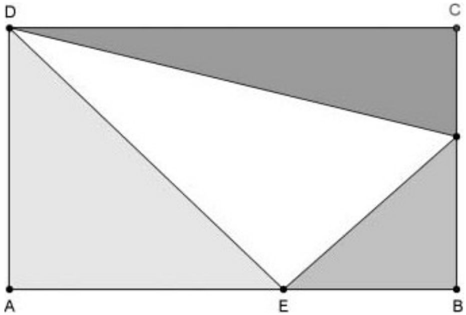
VOLUME 25 AUGUST 1987 NUMBER 3

1. Os Gregos, a geometria clássica e o número de ouro.
2. A sequência de Fibonacci
3. Belos problemas e resultados interessantes

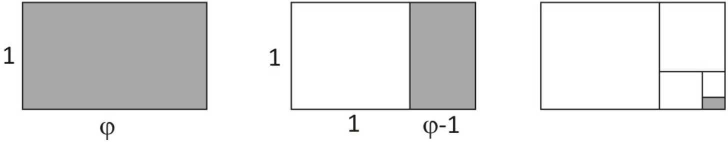
1)Na figura abaixo o triângulo ABC é equilátero e está inscrito no círculo Γ. Se M e N são pontos médios dos lados AB e AC e P é a interseção do prolongamento do segmento MN com o círculo Γ, mostre que o ponto N divide o segmento MP em razão áurea.



2)Determine as posições dos pontos E e F sobre os lados AB e BC do retângulo ABCD para que os triângulos ADE, BEF e CDF possuam áreas iguais.



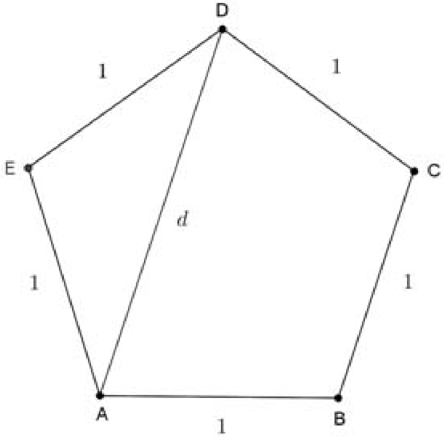
3)(OMRN-2013)Um **retângulo de ouro** é um retângulo de dimensões $1 \times \varphi$, onde $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é a conhecida **razão auréa**. Este tipo de retângulo goza da propriedade de que ele pode ser dividido num quadrado e num retângulo semelhante ao retângulo original. Este processo continua infinitamente conforme ilustra a figura a abaixo:



Diante do exposto, mostre que:

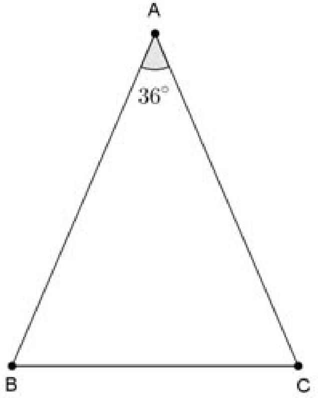
$$1 + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4} + \frac{1}{\varphi^6} + \cdots = \varphi$$

4)Mostre que o comprimento da diagonal de um pentágono de lado 1 mede φ.



5)Na figura abaixo o triângulo ABC é isósceles tal que $BC = 1$, $AB = AC$ e $\angle BAC = 36^\circ$, mostre que:

$$AB = AC = \varphi$$



6)Sendo φ a razão áurea, mostre que:

$$sen54^\circ = cos36^\circ = \frac{1}{2}\varphi$$

$$sen18^\circ = cos72^\circ = \frac{1}{2\varphi}$$

7)Sendo $(f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots)$ a sequência de Fibonacci, e φ a razão áurea, mostre que:

$$\varphi^n = f_n.\varphi + f_{n-1}$$

8)Sendo $(f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots)$ a sequência de Fibonacci, e φ a razão áurea, mostre que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

9)A sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é definida por $f_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ f_{n-2} + f_{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases}$ os primeiros termos dessa sequência são, portanto,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mostre que $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, para todo n natural.

10)Para todo inteiro $n \geq 1$, demonstre a identidade de Cassini para números de Fibonacci:

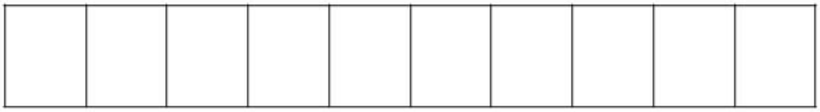
$$f_{n+1}.f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

11)Determine o número inteiro a para que o polinômio

$$d(x) = x^2 - x - 1$$

seja um fator do polinômio $p(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1$.

12)Na faixa 1×10, mostrada na seguir, cada quadrado é pintado ou de azul ou de vermelho, mas dois quadrado adjacentes não podem ser pintados de azul.



De quantas maneiras distintas podemos realizar a pintura?

Obrigado!