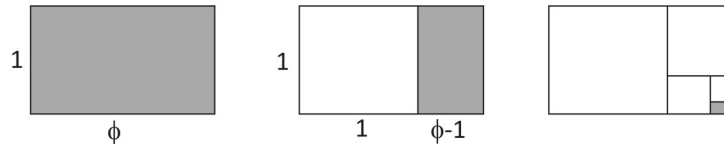

XXIV COMPETIÇÃO MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE - 2013
PROVA DA SEGUNDA FASE - NÍVEL III - Ensino Médio - 05/10/2013

1. Um **retângulo de ouro** é um retângulo de dimensões $1 \times \phi$, onde $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é a conhecida **razão auréa**. Este tipo de retângulo goza da propriedade de que ele pode ser dividido num quadrado e num retângulo semelhante ao retângulo original. Este processo continua infinitamente conforme ilustra a figura a abaixo:



Diante do exposto, mostre que:

$$1 + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^6} + \dots = \phi$$

-
2. Seja S um subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 25\}$ tal que para quaisquer dois subconjuntos disjuntos de S a soma dos elementos de um seja distinta da soma dos elementos do outro. Encontre o maior valor possível para a soma dos elementos de S .
-

3. Uma loteria vende 10000 bilhetes, que são numerados de 0000 até 9999. Quem compra um bilhet com um número cuja soma dos dígitos é igual a 18 ganha um carrinho de brinquedo. Quem compra um bilhete com um número no qual a soma dos dois primeiros dígitos é igual à soma dos dois últimos dígitos ganha um carro. Se o número do bilhete satisfaz a ambas as condições, o comprador não recebe prêmio algum. Se vendem todos os bilhetes, os organizadores da loteria distribuem mais carrinhos de brinquedos do que carros? Qual a quantidade de cada um?
-

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

- $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}.$
- $f(f(f(0))) = 0.$

Mostre que $f(0) = 0.$