Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 01 - Data //2014

NÍVEL I

Um comerciante possui para vender 2014 bolas de gude e deseja distribuí-las em 11 sacos a serem lacrados, de modo que o primeiro cliente que queira comprar bolas de gude possa ser atendido sem que seja necessário abrir dois sacos lacrados, bastando apenas levar os sacos de bolas de gude apropriados.

Como fazer a distribuição das bolas de gude nos sacos se o primeiro cliente pode pedir qualquer quantidade de bolas de gude menor ou igual a 2014?

SOLUÇÃO

Como o comerciante a priori não sabe qual é o interesse do cliente, deve oferecer a possibilidade para ele comprar uma única bola de gude. Para isso, vai ter de reservar um saco com uma única bola de gude.

Se o cliente quiser comprar duas bolas de gude, é mais vantajoso o comerciante colocar um saco com duas bolas do que mais um saco com uma só bola, pois assim ele pode vender 1 bola, 2 bolas ou $3 = 1 + 2$ bolas de gude. De maneira análoga, o comerciante deve colocar para venda um saco com 4 bolas de gude, pois combinando esse saco com os outros ele pode vender sacos lacrados contendo de 1 bola até $1 + 2 + 4 = 7$ bolas de gude.

Para vender oito bolas de gude, o comerciante deve colocar à venda um saco com 8 bolas de gude, pois assim ele vai poder fazer qualquer venda de bola de 1 até $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ bolas de gude.

Seguindo essa idéia, podemos concluir que o comerciante deve separar as bolas em sacos contendo $1, 2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, \cdots, 256 = 2^8, 512 = 2^9$ bolas de gude. Finalmente, para pode atender ao restante dos números de bolas dos possíveis pedidos, ele vai colocar uma saco com $2014 - (1 + 2 + 4 + \cdots, +256 + 512) = 2014 - 1023 = 989$ bolas de gude.

NÍVEL II

Pela primeira vez, o Brasil foi campeão do mundo de futebol em 1958. Prove que no ano de 2058, quando completará 100 dessa conquista, haverá pelo menos uma sexta-feira 13.

SOLUÇÃO

Na verdade, todo ano, seja bissexto ou não, possui uma sexta-feira 13. De fato, na primeira coluna da tabela a seguir temos os dias 13 de todos meses.

Os dias 13 do ano	A Ordem do Dia no Ano Comum	A Ordem do Dia no Ano Bissexto
13 de janeiro	13	13
13 de fevereiro	44	44
13 de março	72	73
13 de abril	103	104
13 de maio	133	134
13 de junho	164	165
13 de julho	194	195
13 de agosto	225	226
13 de setembro	256	257
13 de outubro	286	287
13 de novembro	317	318
13 de dezembro	347	348

Na segunda coluna aparecem as respectivas ordens desses dia no ano, contado a partir do dia primeiro de janeiro, se o ano for comum; e na terceira coluna, essas respectivas ordens, se o ano for bissexto. Para o cálculo dessas ordens, usamos a quantidade de dias de cada mês: janeiro 31 dias, fevereiro 28 dias, se o ano for comum, e 29 dias seo ano for bissexto, março 31 dias, abril 30 dias, maio 31 dias, junho 30 dias, julho 31 dias, agosto 31 dias, setembro 30 dias, outubro 31 dias, novembro 30 dias e dezembro 31 dias.

Agora, usamos o fato de que se a diferença entre os dias de duas datas for um múltiplo de 7, essas datas caem no mesmo dia da semana, pois os 365 dias do ano (ou 366) são colocados em sete "caixas", que correspondem aos sete dias da semana. Por outro lado, existem sete possibildades para a primeira sexta-feira do ano: que pode ser os dias $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7. Na tabela a seguir, mostramos na coluna 1 as possibildades para a primeira sexta-feira do ano; na coluna 2 as ordens das respectivas sexta-feira 13 e as datas corrspondentes, se o ano for comum, e na coluna 3, mostramos a mesma coisa, se o ano for bissexto.

1a. sexta-feira do ano	sexta-feira 13 - ano comum	sexta-feira 13 - ano bissexto
1	Dia 225 = 14 agosto	Dia 134 = 13 de maio
2	Dia 044 = 13 de fevereiro	Dia 044 = 13 de fevereiro
3	Dia 164 = 13 de junho	Dia 318 = 13 de novembro
4	Dia 256 = 13 de setembro	Dia 165 = 13 de junho
5	Dia 194 = 13 de julho	Dia 257 = 13 de setembro
6	Dia 013 = 13 de janeiro	Dia 195 = 13 de julho
7	Dia 133 = 13 de maio	Dia 287 = 13 de novembro

NÍVEL III

São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de branco ou de preto. No disco A existem 100 setores brancos e 100 setores pretos, em ordem desconhecida. No disco B não sabemos quantos setores são brancos. Coloquemos o disco A sobre o disco B, de modo que os setores de A fiquem exatamente sobre os setores do disco B.

É possível então, rodando o disco A, obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondentes de B?

SOLUÇÃO

A resposta é afirmativa. Coloque o disco A sobre B. Seja a_1 o número de discos sobrepostos que tem cores coincidentes. Gire o disco A de um setor, isto é, gire o disco A de um ângulo igual a $\frac{360^0}{200}$, mantendo o disco B fixo. Agora, seja a_2 o número de discos sobrepostos que tem cores coincidentes. Continue com esse processo até obter a_{200}.

Então o número total de coincidências é igual a 100×200. De fato, fixe um setor do disco B. Vamos imaginar que esse setor seja preto. Como o disco A tem 100 setores pretos, haverá 100 posições em que esse setor de B terá a mesma cor que o correspondente setor de A. Assim, o número total de coincidências será 100 vezes o número de setores de B, Daí temos que a média aritmética dos $a_{i's}$ satisfaz:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{200}}{200} = 100 > 99$$

Como a média aritmética é maior do que 99, pelo menos um dos $a_{i's}$ é também maior do que 99. Portanto, em alguma posição o número de coincidências é maior do que ou igual a 100.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Num tabuleiro $a \times b$, com a e b números inteiros maiores do que 2, inicialmente, as casas estão pintadas de branco e preto, como um tabuleiro de xadrez comum. Uma operação permitida é escolher duas casas com um lado comum e pintá-las da maneira seguinte:

•*uma casa branca se pinta de preto*

•*uma casa preta se pinta de verde*

•*uma casa verde se pinta de branco.*

Determinar todos os valores de a e b para os quais é possível, mediante uma sequência de operações permitidas, obter o tabuleiro $a \times b$ pintado de branco e preto, mas com as cores do tabuleiro original invertidas.
Obs. Inicialmente, não há casas verdes, mas elas aparecem logo no primeiro movimento.

SOLUÇÃO

A resposta é: podemos fazer isso se 3 divide $a \times b$, que é o mesmo que dizer que 3 divide a ou 3 divide b.

Suponha que existem a e b para os quais seja possível obter a pintura do tabuleiro desejada. Como em cada operação permitida se escolhe uma casa que inicialmente era preta e uma que inicialmente era branca, a soma de todos as operações de onde participam cada casa que era branca é igual a quantidade de operações com cada casa que inicialmente eram preta e terminou branca. Em particular essa quantidade são côngruas entre si módulo 3. Sejam p o número de casas pretas e b o número de casas brancas.

Como cada casa que era branca terminou preta, a quantidade de operações donde cada casa que era preta foi uma das duas escolhidas é côngruo a 2 módulo 3
Análogamente, como cada casa que era preta terminou branca, a quantidade de operações de onde cada casa que era preta foi uma das duas escolhidas é côngruo a 2 módulo 3. Como estas quantidades são iguais, temos que:

$$p \equiv 2b \pmod 3$$
$$p + b \equiv 3b \equiv 0 \pmod 3$$
$$3 \textit{ divide } p + b$$

Mas, $p + b$ é o total de casas no tabuleiro, que é o mesmo que $a \times b$. Segue que 3 divide $a \times b$. Segue que 3 divide a ou 3 divide b. Vamos supor que 3 divide a. Observe que a é o número de linhas e b o número de coluna no tabuleiro.
Como 3 divide a, podemos dividir o tabuleiro em sub-tabuleiros de 3×1, dividindo primeiro por colunas em b tabuleiros $a \times 1$ e depois cada um desses em tabuleiros de 3×1 (que se pode fazer porque 3 divie a). Agora, vamos mostrar que podemos inverter as cores de quaisquer sub-tabuleiros 1×3. Definimos como operação (1) aquela feita nas duas primeiras casas e operação (2) aquela feita nas duas últimas casas:

$$Caso\ 1 : BPB \overset{Op.\ (1)}{\longrightarrow} PVB \overset{Op.\ (2)}{\longrightarrow} PBP$$

$$Caso\ 2 : PBP \overset{Op.\ (1)}{\longrightarrow} VPP \overset{Op.\ (2)}{\longrightarrow} BVP \overset{Op.\ (2)}{\longrightarrow} BBV \overset{Op.\ (2)}{\longrightarrow} BPB$$

Então podemos inverter as cores de cada sub-tabuleiro e, assim, inverter as cores do tabuleiro maior $a \times b$. Portanto, é possível realizar a pintura como pedida se, e só se, 3 divide $a \times b$.