Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 02 - Data //2014

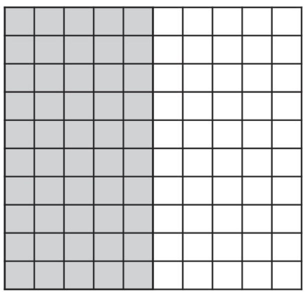
NÍVEL I

Escrevem-se os números $1, 2, 3, \cdots, 100$ nas casas de um tabuleiro 10×10, sem repetir qualquer um deles e colocando um só número em cada casa. Uma operação permitida é escolher duas casas e trocar de posição os números que estão escritos nelas.

Demonstre que é possível realizar 35 operações ou menos, de maneira tal que se consiga que, para duas casas vizinhas quaisquer, a soma dos números nelas escritos seja um número composto
OBS.: Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

SOLUÇÃO

Divida o tabuleiro em dois retângulos 5×10, veja figura a seguir.



A idéia é colocar em um desses retângulos 5×10 somente números pares e no outro somente números ímpares. Examine um desses retângulos 5×10. Em cada linha desses retângulos, existem 5 números, dos quais no mínimo três deles possuem a mesma paridade. Suponha que, no retângulo 5×10 do lado esquerdo, a quantidade de ternos ímpares em todas as linhas seja igual a 5. Desse modo, fazendo $5 \times 2 + 5 \times 3 = 25$ operações permitidas, colocamos em um desses retângulos 5×10 somente números pares e no outro somente números ímpares.

Agora, o problema resume-se em estudar as duas colunas que limita os dois sub-tabuleiros 5×10. Observe que aí cada casa limita com uma e só casa com paridade distinta. Neste caso, temos que mudar a casa por outra que somada com a de paridade distinta resulte num número ímpar composto. Isto pode levar mais de 10 operações, uma por cada casa da linha, que, somadas às 25 já usadas, extrapolaria ao total pedido pelo problema.
A seguir esboçamos uma idéia capaz de diminuir os passos de modo que no total não ultrapassemos as 35 operações pedidos no problema.

Na divisão por 3, cada número do tabuleiro pode deixar resto $0, 1$ ou 2. Analisemos a linha impar que toca a linha par.
Entre os números $1, 2, 3, \cdots, 100$ existem 16 números pares que deixam resto 0 na divisão por 3, existem 16 números pares que deixam resto 1 na divisão por 3 e 16 números pares que deixam resto 2 na divisão por 3. Sabendo disso, para cada casa na fila ímpar, trocamos a casa vizinha da linha por uma outra que tenha um número que está do lado par do sub-tabuleiro, de modo que somando com o número da casa ímpar, resulte num múltiplo de 3. Esta operação pode sempre ser feita pela quantidade de números existentes neste lado do sub-tabuleiro, o que conclui o problema com 35 ou menos operações.

NÍVEL II

Escrevem-se em uma fila a lista dos primeiros 2013 números inteiros positivos

$$1234567891011 \cdots 2010201120122013$$

Que dígito aparece menos vezes na lista?

SOLUÇÃO

Inicialmente, olhemos para os números de 0 até 999 da seguinte maneira:

$$000, 001, 002, 003, \cdots, 998, 999$$

Nessa lista existem 1000 números e para escrevê-los usamos 3000 dígitos, contadas as repetições, e cada um desses dígitos aparece uma quantidade iguais de vezes. Como os dígitos são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, em número de 10, quando se escreve de 000 até 999 usa-se cada dígito 300 vezes. Mas, no início, para escrever de 000 até 009, usamos $3 + 18 = 21$ zeros.
De modo análogo, para escrever os números de 10 até 99 usamos 90 zeros, obtendo um total de $3 + 18 + 90 = 111$ zeros.

Agora, consideremos os números de 100 a 1999. Cada dígito aparece 300 vezes, com excessão do 1, que aparece $1000 + 300 = 1300$ vezes. Portanto, cada dígito, até este momento, aparece 600 vezes, com excessão do zero, que aparece $600 - 111 = 489$ vezes e do dígito 1 que aparece 1600 vezes.

Os números que faltam ser considerados sã::

$$2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013$$

Para escrever estes números que faltam usamos 26 zeros, 6 dígitos 1, 15 dígitos 2, 6 dígitos 1, 2 dígitos 3, 1 dígito 4, 1 dígito 5, 1 dígito 6, 1 dígito 7, 1 dígito 8 e 1 dígito 9.

A conta anterior nos mostra que o dígito zero apareceu 26 vezes e somados com a conta inicial sua quantidade ainda é a menor dentre todos os dígitos. Portanto, o dígito zero é que foi escrito menos vezes.

NÍVEL III

Num tabuleiro 10×10, Ana e Beto disputam um jogo, em que jogam alternadamente, de acordo com as regras seguintes:

Ana começa pintando de vermelho um sub-tabuleiro 2×2, Beto pinta de azul somente uma casa, novamente Ana pinta de vermelho um sub-tabuleiro 2×2 e assim sucessivamente, até que Ana não consegue mais realizar sua jogada, e então Beto pinta de azul todas as casas restantes. Ana vence o jogo se ao final o tabuleiro possui mais casas vermelhas do que azuis.

É possível que Ana possa sempre ganhar, independentemente de como Beto jogue?

SOLUÇÃO

Ana sempre vence. Divida o tabuleiro em 25 tabuleiros 2×2 e observe que Ana pode realmente pintar pelo menos 13 deles, que dá um total de 52 casas, mais da metade das 100 casas do tabuleiro.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Para cada número real t, seja E_t um subconjunto de $\mathbb{R}$. Suponha que, se $s < t$ então E_s é um subconjunto próprio do subconjunto E_t. Isto é, $s < t \Rightarrow E_s \subset E_t$, com $E_s \neq E_t$.

Diga, justificando, se o conjunto $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} E_t$ tem de ser não enumerável.

SOLUÇÃO

A resposta é não. Para cada número real positivo s, considere $E_s = (-s, s) \bigcap \mathbb{Q}$. Observe que, se $s, t \in \mathbb{R}$, temos: $s < t \Rightarrow E_s \subset E_t$, com $E_s \neq E_t$, mas no entanto a união $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} E_t$ é um subconjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, portanto, enumerável.