Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br, iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO Da LISTA SEMANAL No.07 - Data 14/04/2014

NÍVEL I

Esmeraldinho tem alguns cubinhos de madeira de 2 cm de aresta. Ele quer construir um grande cubo de aresta 10 cm, mas como não tem cubinhos suficientes, ele cola os cubinhos de 2 cm de aresta de modo a formar apenas as faces do cubo, que fica oco. Qual é o número de cubinhos de que ele precisará?

SOLUÇÃO

Como cada cubinho tem 2 cm de aresta e o cubo tem 10 cm de aresta, então cabem 5 cubinhos no comprimento, na largura e na altura, então em todo o cubo cabem 125 cubinhos.
Se no lado do cubo coubessem n cubinhos, então o número de cubinhos da parte de dentro do cubo seria igual a $(n-2)\times(n-2)\times(n-2)$. Como no lado do cubo cabem 5 cubinhos, então para sabermos o número de cubinhos da parte de dentro, basta substituir o n pelo 5, e ficaria o seguinte:

$$(5-2)\times(5-2)\times(5-2) = 3\times 3\times 3 = 27$$

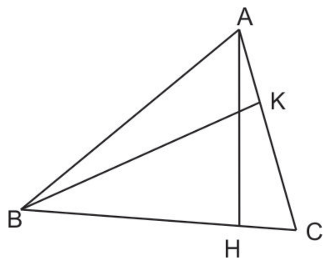
Como em todo o cubo cabem 125 cubinhos, então para deixar o cubo oco, basta tirar a parte de dentro, que tem 27 cubinhos.
Logo, Esmeraldinho precisaria de 125 27 = 98 cubinhos para formar o cubo oco.

NÍVEL II

Prove que: em qualquer triângulo, o produto do comprimento de um lado pelo comprimento da altura relativa a esse lado é sempre o mesmo número, independente do lado escolhido.

SOLUÇÃO

Seja ABC um triângulo qualquer, veja a figura a seguir, onde estão desenhadas as alturas AH e BK, correspondentes aos lados BC e CA, respectivamente.



Observe que os triângulos retângulos ΔACH e ΔBCK tem o ângulo C em comum. Isto significa que os dois triângulos são semelhantes. Assim, os lados correspondentes são proporcionais e podemos escrever

$$\frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BC},$$

o que implica $BC \times AH = AC \times BK$, como queríamos.

NÍVEL III

Seja S um subconjunto de $\{1, 2, 3, \cdots, 25\}$ tais que para quaisquer dois subconjuntos disjuntos de S a soma dos elementos de um seja distinta da soma dos elementos do outro.

Encontre o maior valor possível para a soma dos elementos de S.

SOLUÇÃO

Se um conjunto X possui n elementos, o número de subconjuntos de X com k elementos é igual a $\binom{n}{k}$.
Observe que S não pode ter sete elementos, pois se isto acontecesse, teríamos

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 98$$

subconjuntos com quatro ou menos elementos, cuja soma de seus elementos seria no máximo igual a $25 + 24 + 23 + 22 = 94$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, no máximo duas dessas somas seriam iguais, que é contrário ao pedido.

Suponha que S possui seis elementos. Neste caso, existem $\binom{6}{3} = 20$ subconjuntos com três elementos, sendo a soma de cada um deles no máximo igual a $25 + 24 + 23 = 72$. Como precisaríamos de 20 somas distintas, a soma de três dos menores elementos de S seria no máximo $72 - 20 + 1 = 53$. Logo, a soma dos elementos de S seria no máximo $72 + 53 = 125$. Vamos mostrar a seguir que nem 125 nem 124 são atingidos como soma dos elementos de S. Além disso, construiremos um conjunto S cuja soma dos seus elementos é 123.

Para atingir 125 ou 124 teremos que ter necessariamente $25, 24, 23 \in S$, pois se a soma dos três maiores elementos fosse $71 < 25 + 24 + 23$, então a soma dos três menores seria no máximo igual a $71 - 20 + 1 = 52$ (pois a soma dos 20 subconjuntos são números distintos) e a soma dos elementos de S é no máximo $71 + 52 = 123$.

Portanto, supondo que $25, 24, 23 \in S$, sejam x, y, z os outros três elementos de S, com $x > y > z$. Como $25 - 24 = 1$ e $25 - 23 = 2$, não podems ter $x - y$ ou $y - z4$ maiores do que ou iguias a 3.

Portanto, se $x \leq 20$, então $y \leq 17$, $z \leq 14$ e $x + y + z \leq 20 + 17 + 14 = 51$.

Mas isso não é suficiente, pois $72 + 51 = 123$. Logo, $x > 20$. Isto significa que $x = 22$ ou $x = 21$ e, como $22 + 25 = 23 + 24$, temos que $x = 21$. Esta escolha força lembrar sobre as retrições sobre y, z. Isto é, como $24 - 21 = 3$ e $25 - 21 = 4$, temos $y - z \geq 5$ ou $y \leq 18$ e $z \leq 13$. Infelizmente, estas desigualdades não são suficientes, desde que $y = 18$ e $z = 13$ levam-nos para $13 + 24 + 25 = 18 + 21 + 23$. Consequentemente, $y + z < 18 + 13 = 31$, e a soma dos elementos de S é menor do que $25 + 24 + 23 + 21 + 18 + 13 = 124$. Se $z = 12$, temos $S = \{25, 24, 21, 18, 12\}$, cuja soma dos elementos é 123, e é o maior que podemos obter.

Se S tem somente 5 elementos a soma de seus elementos é no máximo igual a $25 + 24 + 23 + 22 + 21 = 115$, e, portanto, as hipóteses assumidas anteriormente são justificadas.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

São dados 5 números reais não negativos quaisquer, cuja soma seja igual a 1.

Prove que é possível colocar os cinco números nos vértices de um pentágono regular, um número em cada vértice, de tal maneira que dois números colocados em vértices que sejam ligados por um lado do pentágono tenham produto menor do que ou igual a $\frac{1}{9}$.

SOLUÇÃO

Sejam a, b, c, d, e os números reais dados. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Coloque os números nos vértices do pentágono regular na seguinte ordem: e, a, d, c, b.

É fácil ver que: $ad \leq ae \leq be$ e $bc \leq cd$. Para concluir, basta mostrar que $be \leq \frac{1}{9}$ e $cd \leq 19$.

Usando a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, temos:

$$1 = a+b+c+d+e \geq 0+0+c+d+d = c+2d \geq \frac{3c}{2}+\frac{3d}{2} = \frac{3c+3d}{2} \geq 2\sqrt{\frac{3c}{2} \times \frac{3d}{2}} = 3\sqrt{cd}$$

$$1 \geq 3\sqrt{cd} \Longrightarrow cd \leq \frac{1}{9}.$$

Por outro lado, temos

$$1 = a+b+c+d+e \geq 0+b+b+b+c = 3b+e \geq 2\sqrt{3b \times e}$$

$$1 \geq 2\sqrt{3b \times e} \Longrightarrow 3be \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow be \leq \frac{1}{12} \leq \frac{1}{9},$$

o que conclui a prova.