Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

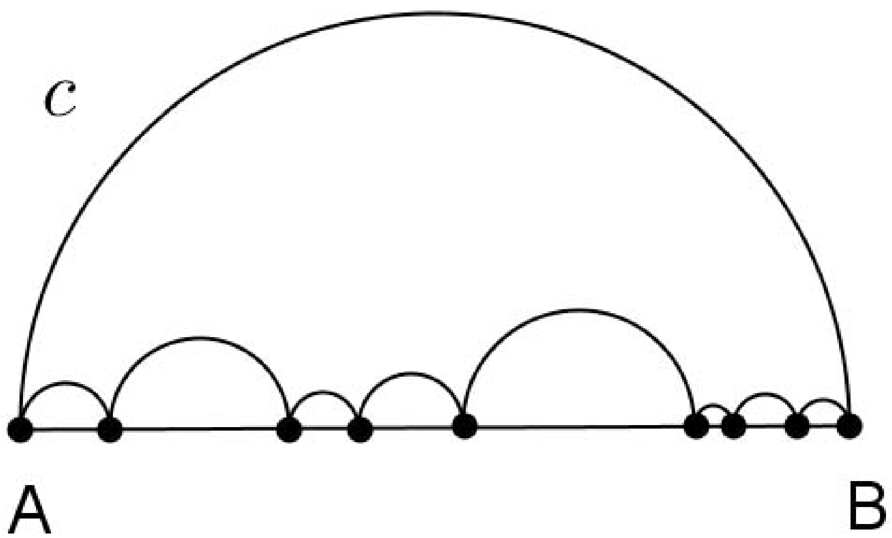
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br..

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 11 - Data 17/06/2014

NÍVEL I

Uma formiga tem de caminhar do ponto A ao ponto B, veja figura a seguir.



Existem duas possibilidades: caminhar a partir de A ao longo do semicírculo C ou ir ao longo dos semicírculos desenhados no diâmetro, AB, do círculo maior.

Qual é o caminho que a formiga deve escolher, se ela pretende percorrer o menor percurso?

SOLUÇÃO

A resposta é: a formiga pode escolher qualquer um dos caminhos, pois os dois caminhos tem o mesmo comprimento. Vamos provar que os caminhos tem o mesmo comprimento ainda que tenhamos k semicírculos desenhados ao longo do diâmetro AB.

Se o círculo tem raio r, o caminho C mede $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$. Agora, vamos calcular o comprimento do outro caminho. Suponha que ao longo do diâmetro AB existam k semicírculos, cada um deles com raio medindo $r_1, r_2, \cdots, r_k$, respectivamente. O comprimento do percurso ao longo dos k semicírculos será igual a:
$\pi.r_1 + \pi.r_2 + \pi.p_k = (p_1 + p_2 + \cdots + p_k).\pi$.

Por outro lado, $2p_1 + 2p_2 + \cdots + 2p_k = \overline{AB} = 2r$. Portanto, $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) = r$. Ou seja $\pi.r_1 + \pi.r_2 + \pi.p_k = (p_1 + p_2 + \cdots + p_k).\pi = \pi r$, o que nos leva a concluir que os dois caminhos possuem o mesmo comprimento.

NÍVEL II

Marcam-se vários pontos distintos no plano, e traçam-se todos os segmentos determinados por esses pontos. Uma reta r não passa por nenhum dos pontos marcados e corta exatamente 60 dos segmentos traçados.

Quantos segmentos não estão cortados por r? Dar todas las posibilidades.

SOLUÇÃO

Sejam A e B dois dos pontos marcados. A reta r corta o segmento AB se e so se A e B estão em lados distintos de r. Seja a a quantidade de pontos marcados em um dos lados de r e b a quntidade do outro lado (lembre-se: não existem pontos marcados sobre r). Então existe exatamente ab pares de pontos A, B, com A e B em lados distintos de r, o que implica que r corta exatamente ab segmentos traçados. Além disso, r não corta nenhum segmento determinado por dois pontos de um mesmo lado de r. Logo, o número de segmentos que r não corta é igual a

$$\frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}b(b-1).$$

Dado que r corta exatamente 60 segmentos, o argumento anterior nos leva a $ab = 60$. Logo, (a, b) é um par de divisores de 60, com produto igual a 60. Temos 6 de tais pares: $\{1, 60\}, \{2, 30\}, \{3, 20\}, \{4, 15\}, \{5, 12\}, \{6, 10\}$. Os respectivos valores de $\frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}b(b-1)$ são: $1770, 436, 193, 111, 76, 60$. É claro que as 6 alternativas são possiveis.

NÍVEL III

Nas casas de um tabuleiro 6×6 escrevem-se trinômios do segundo grau, um trinômio por casa, de modo que o coeficiente do termo de maior grau de qualquer um deles seja positivo. Os coeficientes de todos os trinômios são números inteiros pertencentes ao conjunto $S = \{-60, -59, \cdots, 46, 47\}$ e cada número é usado uma única vez.

Prove que, no mínimo em uma coluna, a soma de todos os trinômios é um polinômio com uma raiz real.

SOLUÇÃO

Pelos dados do problema, arrumam-se 36 trinômios do segundo grau nas casas do tabuleiro. Como cada trinômio é da forma $ax^2 + bx + c$ e $a, b, c \in S$, usamos todos os 108 elementos de S. Para cada casa (i, j) do tabuleiro, com $i, j \in \{1, 2, \cdots, 6\}$, denotamos o trinômio aí escrito por $P_{ij}(x) = x^2 + b_{ij}x + c_{ij}$, com $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in S$
Vamos chamar a soma de todos os trinômios na $j-$ésima coluna, $1 \leq j \leq 6$, de

$$P_j(x) = a_j.x^2 + b_j.x + c = (\sum_{i=1}^{6} a_{ij})x^2 + (\sum_{i=1}^{6} b_{ij})x + (\sum_{i=1}^{6} c_{ij})$$

Agora, seja

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C = \sum_{i=1}^{6} P_j(x)$$

Suponha que nenhum dos $P_j(x)$ tenha raiz real. Como os coeficientes a_{ij} são todos positivos, do estudo do trinômio, podemos afirmar que $P_j(x) > 0$, para todo $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mas, $P_j(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, significa dizer que o discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \quad (*).$$

Por outro lado, temos $P_j(1) = a_j + b_j + c_j$

Assim, $P(1) = A + B + C = \sum_{i=1}^{6}(a_j + b_j + c_j) = (\sum_{i=1}^{6} a_{ij}) + (\sum_{i=1}^{6} b_{ij}) + (\sum_{i=1}^{6} c_{ij})$.

$$= (-60 - 59 - \cdots - 1 + 0 + 1 + \cdots + 47) = -702$$

Portanto, $A + B + C = -702 \Longrightarrow B = -(A + C + 702) \Longrightarrow B^2 = (A + C + 702)^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (A + C + 702)^2 - 4AC = (702 - A + C)^2 + 4.702.A > 0$. Contradição com (*).

Portanto, no mínimo em uma coluna, a soma de todos os trinômios é um polinômio com uma raiz real.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Pinte ou de vermelho ou de azul cada lado e diagonal de um polígono regular de 2013 lados. Um movimento permitido é escolher um vértice e mudar a cor de todos os segmentos que partem daquele vértice, isto é, se ele é vermelho mudamos para azul e vice-versa.

Prove que, não importa como os segmentos são pintados inicialmente, fazendo movimentos sucessivos, é possível obter o número par de segmentos azuis que partem de cada vértice. Prove também que a pintura resultante é unicamente determinada pela pintura inicial.

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que é possível obter o número par de segmentos azuis que partem de cada vértice.

No sentido horário, numere sucessivamente os vértices do polígono com $1, 2, 3, \cdots, 2012, 2013$. Para cada $i \in \{1, 2, 3, \cdots, 2013\}$, sejam:
a_i o número de segmentos azuis que partem do vértice i;

Observe que, quando escolhemos um vértice i para fazer um movimento, mudamos de cor todos segmentos que partem de i. Isto significa que todos os números inteiros a_j, com $j \in \{1, 2, \cdots, 2013\}$, mudam de paridade com um movimento.

Chamemos de **grau azul** (respectivamente **grau vermelho**) de um vértice ao número de segmentos azuis (respectivamente vermelhos) que partem dele. Chamemos de **grau total** a soma dos graus azul e vermelho.
Como 2013 é ímpar, o grau total de cada vértice, $2013 - 1 = 2012$, é par. Logo, os graus azul e vermelho são de mesma paridade. Isto significa que ao fazer uma operação permitida num vértice V, o grau azul de V mantém sua paridade, mas os graus de todos os outros vértices mudam de paridade.
Por outro lado, a soma de todos os graus azuis é igual ao dobro do número de segmentos azuis, o que significa dizer que é par. Logo, o número, k. de vértices com grau azul ímpar é par.
Se $k = 0$, concluímos. Caso contrário, seja U e V dois vértices com grau azul ímpar. Aplicando uma operação em U e em seguida uma operação em V, tanto U como V ficarão com grau azul par, enquanto todos os restantes mudarão de paridade duas vezes e, portanto, ficarão com grau azul de mesma paridade que tinham antes das operações. Isto significa que o número de vértices com grau azul ímpar diminuiu de dois, e continuando desta maneira, chegarão eventualmente a zero.