Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 15 - Data 04/08/2014

NÍVEL I

Um tabuleiro 2×2013 tem uma lâmpada em cada casa. Cada lâmpada tem um interruptor que inverte o seu estado: se está acesa ele apaga, se está apagada ele acende, bem como de todas as lâmpadas adjacentes (horizontalmente ou verticalmente) a ela. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas, com excessão de uma lâmpada acesa na coluna 13.

Determinar se é sempre possível, usando uma sequência de movimentos com os interruptores, apagar todas as lâmpadas.

NÍVEL II

Dois jogadores, Alice e Bob, disputam o jogo seguinte:
-Alice escolhe 5 números reais, não necessariamente distintos.
-Alice escreve numa folha de papel e mostra para Bob todas as somas dos pares dos números escolhidos por ela (existem $\frac{5\times(5-1)}{2} = 10$ de tais pares).
-Bob vence se ele, em uma única tentativa, acerta os 5 números escolhidos por Alice.

Bob vence o jogo, independemente a escolha de Alice?

NÍVEL III

Para números inteiros positivos n, defina

$$a_n = 3^n + 6^n - 2^n.$$

Encontre, justificando sua resposta, todos os números primos que não dividem quaisquer um dos números $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Prove que, todo conjunto de n pontos no plano podem ser cobertos por um número finitos de discos tais que a soma dos diâmetros sejs menor do que n e a distância entre quaisquer dois discos seja maior do que 1.