Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,**

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

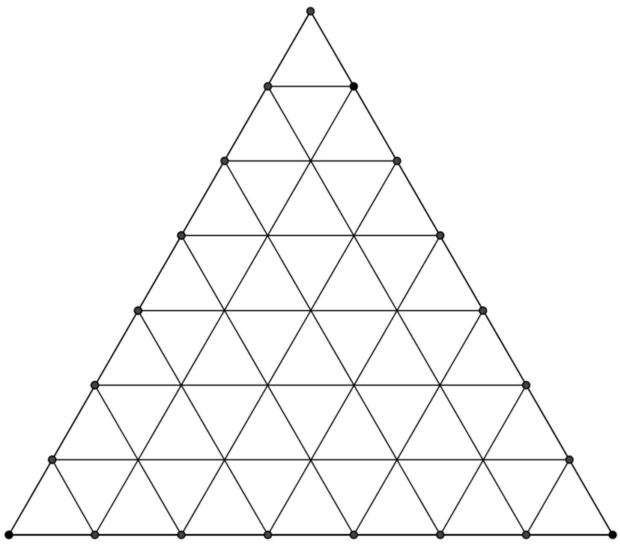
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 16 - Data 11/08/2014

NÍVEL I

Divide-se um triângulo equilátero com lados de comprimento 7 em 49 triângulos equiláteros com lados de comprimento 1, traçando paralelas a seus lados, veja figura a seguir.

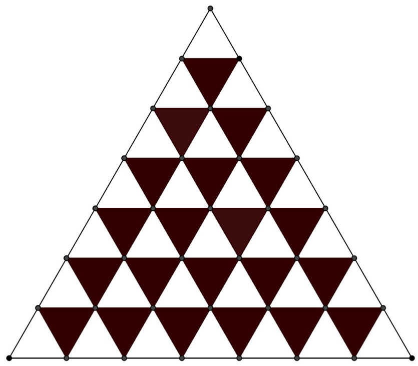


Ao longo das paralelas, recortam-se do triângulo paralelogramos com um par de lados de comprimento 1 e o outro par de comprimento 2.

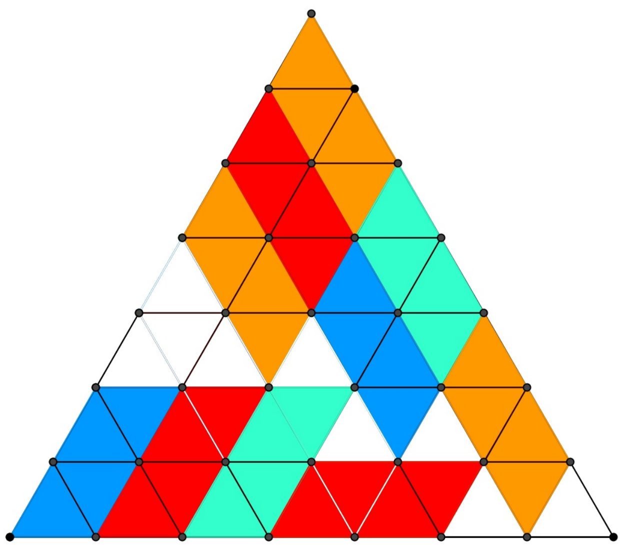
Determinar a maior quantidade destes paralelogramos que se pode cortar.

SOLUÇÃO

Inicialmente, pintamos os triângulos de branco e preto, de maneira tal que dois triângulos com um lado em comum estejam pintados de cores distintas, veja figura a seguir



Observe agora que, cada paralelogramo pedido ocupa exactamente dois triângulos menores brancos e dois pretos. Mas, depois de pintar os triângulos de branco ou preto temos 28 brancos e 21 pretos. Portanto, o número máximo de paralelogramos quer se pode cortar é 10. E para mostrar que esse é o número maior possível, mostramos o exemplo a seguir.



NÍVEL II

Definimos uma sucessão denúmeros de acordo com as seguintes regras:
Os primeiros três números são $0, 1$ e 2. A partir do quarto termo da sucessão, se os últimos três números são a, b, c o termo seguinte é igual a c menos o menor dos dois números a e b.
Os primeiros termos da sucessão são: $0, 1, 2, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 3, \cdots$. Por exemplo, o nono termo é $-1-(-2) = 1$ e o décimo é $1-(-2) = 3$.

Qual é o termo colocado na posição 100 desta sucessão?

SOLUÇÃO

Em outras palavras, a sucessão é dada por:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2 \ e \ a_n = a_{n-1} - \ min\{a_{n-2}, a_{n-3}\},$$

para $n \geq 4$. Assim, os primeiros 30 termos da sucessão são:

$$0, 1, 2, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 3, 4, 3, 0, -3, -3, 0, 3, 6, 3, 0, -3, -3, 0, 3, 6, 3, 0, -3, -3, 0, \cdots$$

É fácil perceber que, depois do termo a_{12}, a sucessão torna-se periódica, com a repetição dos termos $0, -3-3, 0, 3, 6, 3$. Assim, os 88 termos que vão de a_{13} até a_{100} aparecem com uma periodicidade de comprimento 7. Como $88 = 7 \times 12 + 4$, o termo a_{100} corresponde ao quarto termos de $0, -3-3, 0, 3, 6, 3$. Portanto, $a_{100} = 0$.

NÍVEL III

Os elementos, a_{ij}, de uma matriz de dimensões 2012×2012 são números inteiros, escolhidos de tal modo que as somas de todos os elementos das linhas, colunas e das diagonais principais são distintas (um total de $2012 + 2012 + 2 = 4026$ somas).

Qual é o menor quantidade de números distintos que deve ser usada como elementos da matriz?

SOLUÇÃO

A resposta é 3.
Se forem usados no máximo dois números, digamos x e y, a soma de cada linha e coluna é completamente determinada pela quantidade de y. Este número varia de 0 a 2012. Assim, existem apenas 2013 somas possíveis, que não é suficiente para as 4026 linhas, colunas, e diagonais.
Por outro lado, se n é um número grande, digamos 10000, é possível preencher a matriz usando somente os números $0, 1$ e n e atendendo as hipóteses do problema. A seguir, exemplificamos para o caso de uma matriz 6×6.

$$A = a_{ij6\times6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & n \\ 1 & 1 & 1 & 0 & n & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & n & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja.

$$K = \sum_{a_1=0}^{2} \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \cdots \sum_{a_{2011}=0}^{a_{2010}} \left[\prod_{n=1}^{2011} a_n \right].$$

Encontre o resta da divisão de K por 1000.

SOLUÇÃO

É fácil ver que $a_1, a_2, \cdots, a_{2011}$ forma uma sequência decrescente com elemento máximo menor do que ou igual a 2. Assim, o produto dos $a_{n's}$ é uma potência de 2, ou 0. Observe que cada valor de 2 pode ser expresso, de modo único, porque a sequência é decrescente. Logo, o valor de K é dado por

$$K = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{2011} = 2^{2012} - 1.$$

Portanto, $K = 2^{2012} - 1 \equiv 95 \ (mod\ 1000)$.