Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 18 - Data //2014

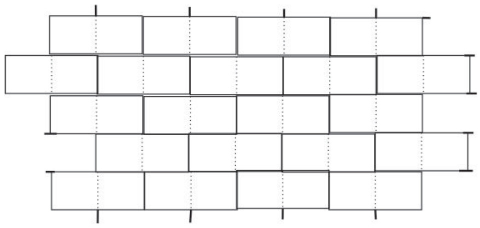
NÍVEL I

Num tabuleiro de xadrez ilimitado, dois jogadores alternadamente fazem seus movimentos preenchendo uma casa desocupada. O jogador A, que começa, na sua vez de jogar, preenche uma casa com X e o jogador B, preenche com $\circ$. Quem primeiro preencher uma quadrado 2×2 com seus símbolos vence.

O jogador A sempre vence?

SOLUÇÃO

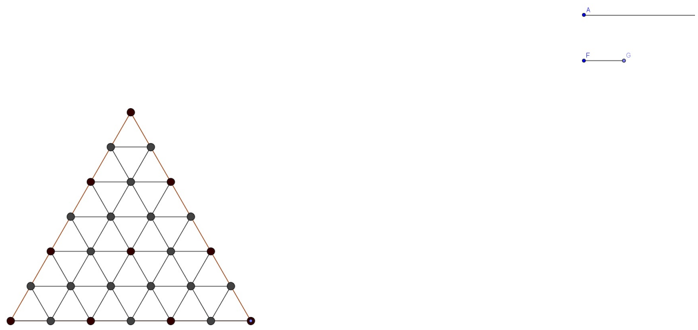
Não. O jogador B tem uma estratégia que impede o jogador A de vencer.
O jogador B divide o tabuleiro na forma de dominós, retângulos 2×1, veja figura a seguir.



Cada vez que o jogador A faz seu movimento, o jogador B responde preenchendo a outra casa do dominó onde A fez seu movimento. Como todo quadrado 2×2 contém um dominó, o jogador A não pode vencer.

NÍVEL II

Divide-se um triângulo equilátero de lado 6 em 6^2 triângulos equiláteros menores, de lado 1, mediante paralelas ao seus lados, veja figura ilustrativa a seguir.



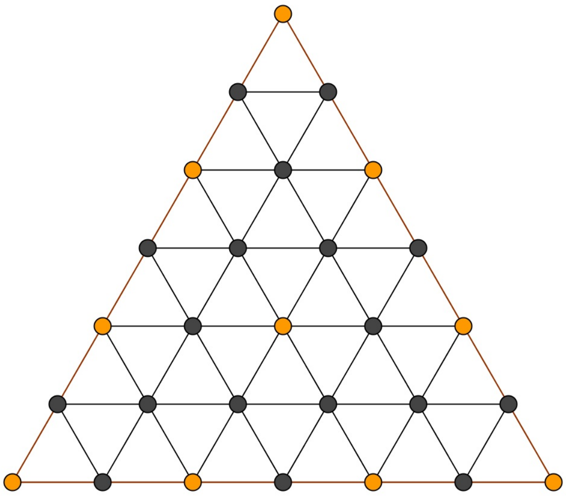
Em cada vértice de um triângulo menor há uma formiga. No mesmo instante, todas as formigas começam a caminhar com a mesma velocidade pelas retas da triangulação. No segundo seguinte, ao chegar a outro vértice giram 60^0 ou 120^0 à esquerda ou à direita e assim seguem movendo-se.

Determinar se é possível que este movimento se desenvolva para sempre sem ter nunca duas formigas em um mesmo vértice de um triângulo menor.

SOLUÇÃO

A resposta é não.

Considere as 10 formigas que no instante zero estão sobre os pontos amarelos, veja figura a seguir.

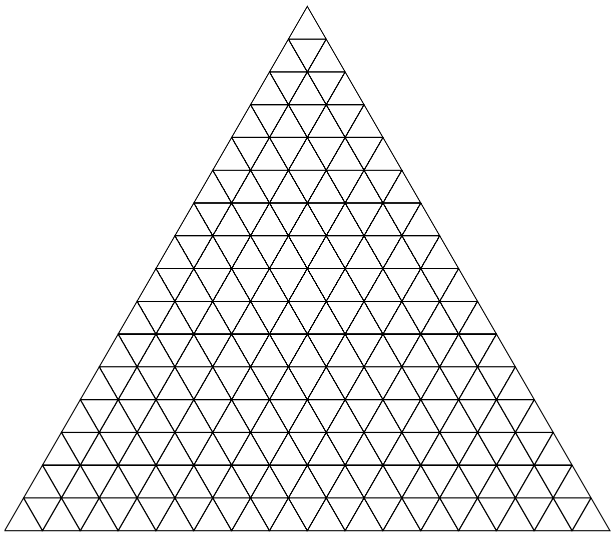


No instante 1 estas formigas estarão nos pontos pretos. Considere também as formigas que no instante 1 estarão sobre os pontos amarelos.
Agora, observe que nenhuma dessas 20 formigas consideradas acima podem estar sobre um ponto amarelo no instante 2
De fato, para o primeiro grupo de formigas isto ocorre porque a única forma de chegar em dois segundos de um ponto amarelo a outro é em linha reta e, pela hipóteses, isto é proibido. Para o outro grupo é óbvio.

Assim, no instante 2 as 20 formigas que consideramos acima estarão em pontos pretos e existem somente 18 pontos pretos. Portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, haverá pelo menos duas formigas no mesmo ponto.

NÍVEL III

Divide-se um triângulo equilátero em n^2 triângulos equiláteros congruentes menores, veja figura ilustrativa, a seguir, para o caso de n = 16. Uma aranha está em um vértice e uma mosca em outro. Alternadamente, cada uma delas se movimenta para um vértice vizinho.



Prove que a aranha sempre pode pegar a mosca, independentemente de como ela se movimenta ao longo dos vértices.

SOLUÇÃO

Suponha-se que o triângulo grande encontra-se apoiado em um dos seus lados, conforme a figura. Então uma estratégia conveniente para a aranha será a seguinte:
(1) Primeiro, ela se move para o vértice inferior esquerdo do triângulo grande.
(2), Como a mosca é maior do que a aranha, a aranha move-se para cima ao longo do lado esquerdo do triângulo grande.
(3) Depois de atingir a linha horizontal, onde a mosca está, a aranha se move: à direita, à direita mais acima ou à direita mais embaixo, dependendo do último movimento da mosca.
Com essa estratégia, a aranha vai limitando os movimentos da mosca até conseguir capturá-la.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Desenham-se 1992 vetores no plano. Dois jogadores disputam uma partida, na qual jogam alternadamente. O movimento do primeiro jogador consiste em escolher um vetor ainda não escolhido e pintá-lo de vermelho. O segundo jogador, na sua vez de jogar, faz um movimento semelhante ao do primeiro jogador, mas pintando de verde. No final do jogo, quando todos os 1992 vetores tenham sido pintados, calculam-se a soma de todos os vetores vermelhos e de todos os vetores verdes. Se a soma de todos os vetores vermelhos for um vetor maior do que o vetor soma de todos vetores verdes, o primeiro jogador vence.

O primeiro jogador possui uma estratégia que garante que ele não perde o jogo?

SOLUÇÃO

Sim. O primeiro jogador possui uma estratégia que garante que ele não perde o jogo.

Seja $\overrightarrow{a}$ a soma de todos os 1992 vetores. Agora considere um sistema de coordenadas retangulares., com o eixo X na direção de $\overrightarrow{a}$ ou em qualquer direção se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Em cada movimento, o primeiro jogador escolhe para pintar de vermelho o vetor que tiver a maior coordenada x. No final do jogo a soma de todos esses vetores terá uma coordenada x não menor do que a soma dos vetores verdes, escolhidos pelo segundo jogador. Além disso, como a soma de todos os vetores é zero, o valor absoluto da coordenada y de cada vetor final de ambos os jogadores são iguais. Portanto, o primeiro jogador não pode perder este jogo usando esta estratégia.