Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 19- Data 01/09/2014

NÍVEL I

Três formigas estão localizadas uma em cada vértice de um quadrado, deixando o outro vértice livre. Uma formiga pode se mover somente ao longo de uma reta paralela à reta determinada pelos pontos onde se encontram as outras duas formigas, movendo-se uma de cada vez.

Diga, justificando, se depois de vários movimentos das formigas, pode acontecer que todas elas atinjam o respectivo ponto médio de três lados distintos do quadrado.

SOLUÇÃO

É impossível. A idéia é unir os três pontos onde as formigas estão, formando um triângulo retângulo, cuja área é a metade da área do quadrado, digamos $\frac{S}{2}$. Sejam A e B duas formigas fixas e C a formiga que está se movendo. Como cada formiga pode mover-se paralelamente à reta formada pelos dois pontos onde estão as outras duas, a reta AB se mantém constante e a altura do ΔABC, com relação ao lado AB é constante, o que implica que a área não varia. Mas, como este é o único movimento permitido, a área nunca irá variar e se manterá igual a $\frac{S}{2}$. Por outro lado, se as três formigas atingirem os pontos médios de três lados do quadrado, a área do triângulo por eles formados será igual $\frac{S}{4}$, que é uma contradição, pois a área se mantém constante. Portanto, é impossível que cada uma das formigas atinja o respectivo ponto médio de três lados distintos do quadrado.

NÍVEL II

Duas pessoas, A e B, disputam um jogo retirando moedas de uma pilha contendo inicialmente 2006 moedas. Os jogadores fazem seus movimentos alternadamente e A começa. Um movimento consiste em retirar da pilha de 1 a 7 moedas e cada jogador mantém-se com as moedas que foram removidas. Se um jogador desejar, na sua vez de jogar, pode abrir mão de retirar qualquer moeda da pilha, mas para fazer isso, tem que pagar 7 moedas das que retirou da pilha em movimentos anteriores. Estas 7 moedas são colocadas em uma caixa separada e já não participam mais do jogo. Vence quem retirou a última moeda.

Determine qual dos dois jogadores pode garantir a vitória, não importa como o outro jogue. Mostrar uma estratégia vencedora e explicar por que ela funciona.

SOLUÇÃO

O jogador A, que começa, tem uma estratégia vencedora, que consiste na remoção de 7 moedas em cada movimento seu, até que na pilha só restem 14 moedas ou menos.
Se só existem 7 moedas ou menos, no momento do jogador A fazer seu movento, ele remove todas e vence.
Se num momento do jogador A fazer seu movimento existem entre 8 e 14 moedas, o jogador A deve ter em seu poder no mínimo $7 \times 143 = 1001$ moedas, pois se ele tivesse $7 \times 142 = 994$ moedas ou menos, o jogador B poderia ter, no máximo, 994 e na pilha teria ainda 18 moedas. Logo, B deve ter menos de 1001 moedas, pois, caso contrário, na pilha teria no máximo 4 moedas. Portanto, o jogador A pode ter deixado de fazer seu movimento 143 vezes e B no máximo 142 vezes.
Se na pilha restam 8 moedas os jogadores podem abrir mão de fazer movimentos (pagando 7 moeda por vez), e no final, o jogador B, quando acabar sua reserva de moedas, precisará remover alguma moeda da pilha, deixando-a com 7 ou menos moedas, o que permite A vencer.
Se na pilha restaram k moedas, com $9 \leq k \leq 14$, o jogador A retira $(k-8)$ moedas, deixando 8 na pilha. Neste caso, o jogador B, para não perder, abre mão de fazer seu movimento e A também abre mão de fazer seu movimento, até que B será obrigado a retirar alguma moeda, o que permite o jogador A vencer.

NÍVEL III

Uma loteria vende 10000 bilhetes, que são numerados de 0000 até 9999. Quem compra um bilhete com um número cuja soma dos dígitos é igual a 18 ganha um carrinho de brinquedo. Quem compra um bilhete com um número no qual a soma dos dois primeiros dígitos é igual à soma dos dois últimos dígitos ganha um carro. Se o número do bilhete satisfaz a ambas as condições, o comprador não recebe prêmio algum.

Se vendem todos os bilhetes, os organizadores da loteria distribuem mais carrinhos de brinquedos do que carros? Qual a quantidade de cada um?

SOLUÇÃO

Os organizadores da loteria distribuem iguais quantidade de carrinhos de brinquedo e de carros.

Vamos mostrar que, a partir de um bilhete que ganha um carrinho de brinquedo, obtemos um um bilhete que ganha um carro, e vice-versa.
Seja $T = abcd$ o número do bilhete que ganha um carrinho de brinquedo. Logo, $a + b + c + d = 18$, que pode ser escrito da forma

$$a + b = 18 - (c + d) = (9 - c) + (9 - d).$$

Se substituimos os dígitos c e d por $c' = 9 - c$ e $d' = 9 - d$, respectivamente, obtemos outro número de um bilhete $T' = abc'd'$, que é um bilhete premiado com um carro, pois $c' + d' = (9 - c) + (9 - d) = 18 - (c + d) = a + b$
Inversamente, se $K = abef$ é o número de um bilhete que ganha um carro, então, substituindo e e f por $9 - e$ e $9 - f$, respectivamente, obtemos um bilhete premiado com um carrinho de brinquedo.

Vamos mostrar agora que, um bilhete que satisfaz a ambas as condições para ganhar um carro e um carrinho de brinquedo, que é um bilhete que nada ganha, não corresponde a qualquer bilhete que ganhe um carro ou um carrinho de brinquedo. De fato, se $J = abcd$ e $J' = abc'd'$ são dois bilhetes nestas condições, então temos

$$a + b = c + d \;\; e \;\; a + b = c' + d' = 9 \Longrightarrow c \neq c' \; e \; d \neq d'$$

Portanto, a loteria distribui como prêmio a mesma quantidade de carros e carrinhos de brinquedo.

Vamos encontrar a quantidade de bilhetes que ganham carrinhos de brinquedo. Seja $K = abcd$ um desses bilhetes premiados. Temos que $a + b + c + d = 18$. Seja $a + b = 19 - k$ e $c + d = k - 1$. Então, para $k = 1, 2, 3, \cdots, 10$, existem k possibilidades para o par (a, b) e k possibilidades para o par (c, d), dando K^2 possibilidades para ambos os pares.Deste modo, o número total é igual a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 + 9^2 + 8^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = 670$$

O caso $k = 10$, significa que a soma dos dois primeiros dígitos é igual a soma dos dois últimos dígitos e o bilhete nada ganha.
Portanto, a loteria distribui 570 carros e 570 carrinhos de brinquedo

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Sejam $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ números reais quaisquer.

Prove que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0.$

SOLUÇÃO

Considere o polinômio

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

Então $P(x) \times P(x) = P^2(x) = \displaystyle\sum_{k,s=1}{}^{n} a_k a_s x^{k+s-1}$. Integrando membro a membro, temos

$$\int_0^1 P^2(x)dx = \sum_{k,s=1}^{n} \frac{a_k a_s}{i+j-1}$$

Como $\displaystyle\int_0^1 P^2(x)dx \geq 0$, segue o resultado.