Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,**

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br iesus_diniz@yahoo.com.br.

**Por favor, divulguem os problemas!**

---

**SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 20 - Data** 08/09/2014

## NÍVEL I

Durante uma operação, a polícia encontrou 1001 moedas, todas com aparências iguais, um bilhete dizendo que 501 delas eram autênticas e as restantes falsas, e que cada moeda falsa era uma grama mais leve do que cada moeda autêntica, que pesava uma quantidade inteira de gramas. Para classificar as moedas, veio um perito com uma balança de dois pratos que indicava não só em que prato está o objeto mais pesado, mas também indicava a diferença entre os pesos dos objetos em cada um dos pratos. O perito disse que qualquer que seja a moeda que a polícia escolhe, ele sempre pode dizer se ela é autêntica ou falsa, usando apenas uma vez a balança de dois pratos.

Como o perito pode fazer a classificação das moedas usando uma só vez a balança?

## SOLUÇÃO

Escolha uma moeda qualquer dentre as 1001 encontradas. Vamos mostrar que pesando as 1000 moedas restantes em dois blocos quaisquer de 500, podemos identificar se a moeda escolhida é falsa ou verdadeira.

Suponha que cada moeda falsa pesa $P$ gramas e cada moeda autêntica pesa $P+1$ gramas. Colocamos 500 das moedas restantes num dos pratos da balança e as outras 500 no outro prato. Agora vamos analisar como seria a diferença entre os pesos dos dois pratos da balança se a moeda escolhida fosse autêntica ou falsa. Vamos supor que no primeiro prato existem $a$ moedas falsas e $b$ moedas verdadeiras.
Se a nossa moeda escolhida é autêntica, o peso total dessas 500 moedas no primeiro prato é igual a $a \times P + b \times (P+1)$ gramas. No outro prato da balança teremos um peso igual a $(500-a) \times P + (500-b) \times (P+1)$ gramas.
A diferença dos pesos é igual a

$$[(500-a) \times P + (500-b) \times (P+1)] - [a \times P + b \times (P+1)] =$$

$$= (500-2a) \times P + 500 \times P + 500 - 2b \times P - 2 \times b \times P - 2b,$$

que é um número par (soma de números pares).

Se a nossa moeda escolhida é falsa, o peso total dessas 500 moedas no primeiro prato é igual a $a \times P + b \times (P+1)$ gramas. No outro prato da balança teremos um peso igual a $(499-a) \times P + (501-b) \times (P+1)$ gramas .

Neste caso, a diferença dos pesos é igual a

$$[(500-a) \times P + (500-b) \times (P+1)] - [(499-a) \times P + (501-b) \times (P+1)] =$$

$$= (501-2a) \times P - 2a \times P + 499 \times P + 499 + 2 \times b - 2 \times b - 499 =$$
$$= 1000 \times P - 2 \times a \times P - 2 \times b \times P - 499,$$

que é um número ímpar.

Portanto, se a balança nos dá uma diferença entre os pesos dos pratos par, a moeda escolhida será autêntica, e se é ímpar, será falsa.

## NÍVEL II

Associar aos vértices de um polígono convexo de 33 lados os números de 1 a 33, sem repetir, e em seguida, associar aos lados a soma dos números de seus vértices. O objetivo é que os números associados aos lados sejam 33 inteiros consecutivos ordenados.

## SOLUÇÃO

A resposta é $1, 18, 2, 19, 3, 20, 4, 21, \cdots, 16, 33, 17$, esta solução é a única.
O primeiro vértice que escolhemos, associamos a ele o número: $a_1 = 1$. O vértice seguinte, será o $a_2$. Logo, associamos ao lado que liga estes dois vértice o número $1 + a_2$. Pelas hipóteses do problema, os vértices restantes, consecutivamente, no sentido dos ponteiros

do relógio, serão associados aos números $1, a_2, 2, 1 + a_2, 3, 2 + a_2, 4, \cdots, 16, 15 + a_2, 17$. Nesse sentido, essa associação é única. Agora, somando todos esses números , obtemos

$$1+a_2+2+a_2+\cdots+16+15+a_2+17 = (1+2+3+\cdots+17)+16\times a_2 = \frac{17\times 18}{2}+16a_2 \quad (*)$$

Mas, a soma de todos esses números nos lados é igual à soma de todos os números nos vértices, que por sua vez é igual a

$$(1+2+3+\cdots+33) = \frac{33\times 34}{2} = 33\times 17 \quad (**)$$

Assim, como (*) = (**), temos

$$\frac{17\times 18}{2} + 16a_2 = 17\times 9 + 16a_2 = 173 + 16a_2 = 361 \Longrightarrow a_2 = 18.$$

Portanto, a resposta, única, é $1, 18, 2, 19, 3, 20, 4, 21, \cdots, 16, 33, 17$.

**NÍVEL III**

Determine a quantidade de subconjuntos de $U = \{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$ cuja soma de seus elementos seja maior do que 638.

**SOLUÇÃO**

Sejam $S$ a coleção de todos os subconjuntos de $U$ cuja soma de seus elementos seja maior do que ou igual a 638 e $T$ a coleção dos subconjuntos de $U$ cuja soma de seus elementos seja no máximo 637. Assim, $U = S\bigcup T$ e $S\bigcap T = \phi$.
Considere a seguinte função $f : U \longrightarrow U$ tal que, se $A \subseteq S$ então $f(A) = A^c$, onde $A^c$ é o complementar de $A$ em relação a $U$. Como a soma de todos os elementos de $U$ é igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 5 == \frac{50(50+1)}{2} = 1275$, segue que a soma dos elementos de $A^c$ é menor do que ou igual a $1275 - 638 = 637$. Portanto, $A^c \subseteq T$.
Por outro lado, a função $f$ é um bijeção, que aplica $S$ em $T$, o que significa dizer que o número de elementos de $S$, $n(S)$, é igual ao número de elementos de $T$. Como $U = S\bigcup T$ e $S\bigcap T = \phi$, temos que o número de elementos de $U$ é igual a duas vezes o número de elementos de $S$.
Agora, sabemos que o número de elementos de $U$ é igual a $2^{50}$. Assim,
$2^{50} = 2n(S) \Longrightarrow n(S) = 2^{49}$.

**NÍVEL UNIVERSITÁRIO**

Prove que a séries

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{ln(lnln\ k)}$$

converge.

**SOLUÇÃO**

Temos que $(lnln\ k)^{ln\ k} = e^{lnk \times lnln\ k} = \left(e^{ln\ k}\right)^{lnlnln\ k} = k^{lnlnln\ k}$.

Mas, $lnlnln\ e^{e^{e^2}} = lnln\ e^{e^2} = ln\ e^2 = 2$.

Assim, para $k > e^{e^{e^2}}$, temos: $k^{lnlnln\ k} > k^2$. Portanto, $\frac{1}{(lnln\ k)^{ln\ k}} = \frac{1}{lnln\ k} < \frac{1}{k^2}$.

Agora, como a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, aplicando o teste de comparação, deduzimos que a série dada converge.