Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,**

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

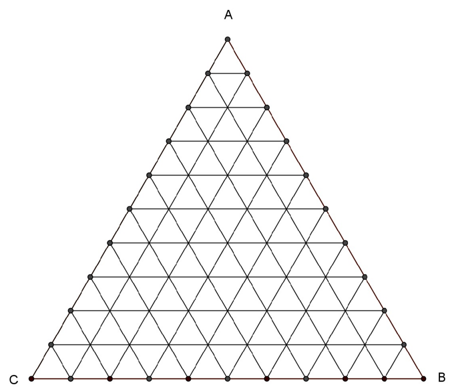
Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 21 - Data 15/09/2014

NÍVEL I

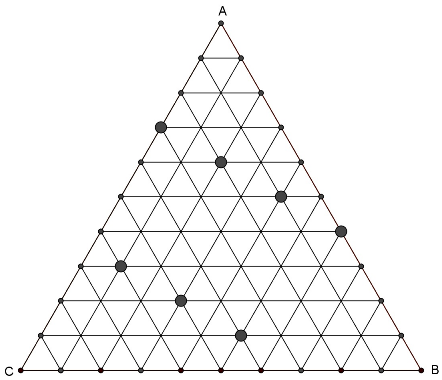
Divide-se um triângulo equilátero ABC em 100 triângulos equiláteros menores congruentes, mediante paralelas aos seus lados, de modo que a altura de cada triângulo menor seja igual a 1, veja figura ilustrativa a seguir.



Qual é o maior número de vértices de triângulos pequenos que podem ser escolhidos de forma que não hajam dois deles em uma reta que seja paralela a qualquer um dos lados do triângulo ABC?

SOLUÇÃO

A resposta é 7. Na figura a seguir mostramos a escolha de 7 vértices satisfazendo as hipóteses do problema.



Vamos mostrar que 7 é o maior número de vértices possíveis de ser escolhido satisfazendo as hipóteses do problema.

Vamos supor que haja uma possibildade de se escolher 8 vértices satisfazendo as hipóteses do problema. Sejam $P_1, P_2, \cdots, P_8$ esses 8 vértices. Para cada $i = 1, 2, 3, \cdots, 8$, sejam a_i, b_i, c_i as distância de P_i aos lados do triângulo maior. Temos:

$$a_i, b_i, c_i \geq 0 \quad e \quad a_i + b_i + c_i = 10$$

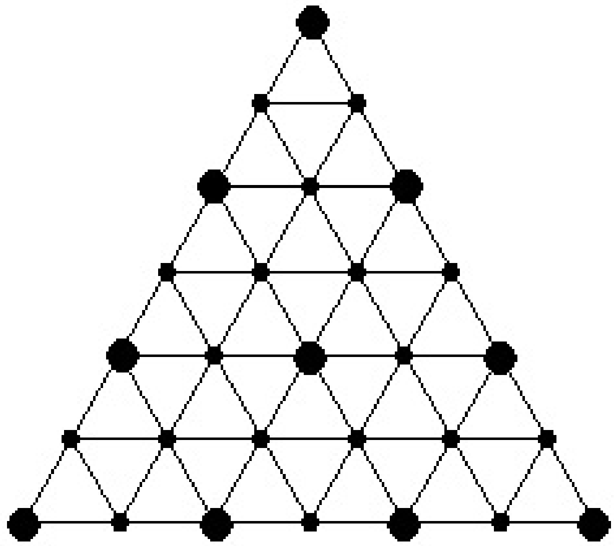
Assim, podemos escrever

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_8) + (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_8) = 80$$

Por outro lado, a soma de cada uma das expressões entre parênteses não é menor do que $1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = 28$. Mas, $3 \times 28 = 84 > 80$. Contradição. Portanto, não podemos escolher 8 vértices satisfazendo as hipóteses do problema.

NÍVEL II

Inicialmente, há uma formiga em cada um dos pontos pintados de preto na figura a seguir.

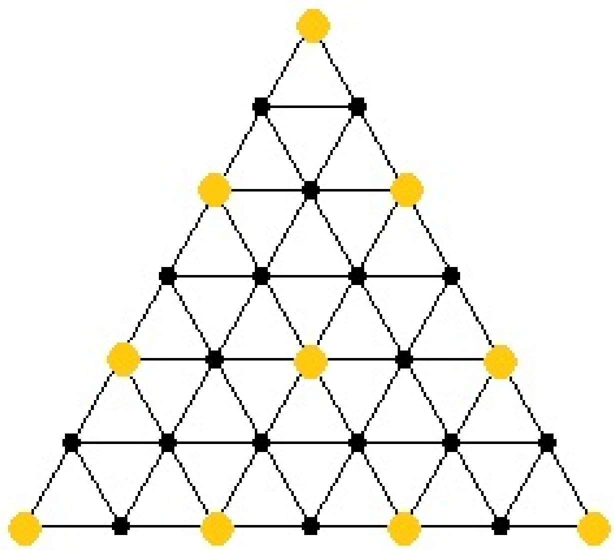


Todas as formigas começam a caminhar ao longo dos segmentos de retas, na mesma velocidade, e, chegando em um ponto marcado, cada besouro gira de 60^0 ou 120^0 em qualquer sentido e continua sua caminhada.

Demonstre que, mais cedo ou mais tarde, haverá pelo menos dois besouros num mesmo ponto marcado.
(Não nos interessa os pontos onde dois bezouros se cruzam fora dos extremos dos segmentos de reta)

SOLUÇÃO

Considere os 10 bezouros que no instante zero estão em cada um dos 10 pontos amarelos, veja figura a seguir.



No momento seguinte, instante um, esses bezouros estarão nos pontos pretos. Agora, considere também os 10 bezouros que estão sobre os pontos no momento um.
Mostraremos a seguir que, nenhum dos 20 bezouros em questão podem estar em um ponto amarelo no momento dois. Para o primeiro grupo de bezouros, isso ocorre porque a única maneira de conseguir ir de um ponto verde a outro em dois segundos é caminhar em linha reta, isso é impossível pelas hipóteses do problema. Para o outro grupo de bezouros o raciocímio é o mesmo.
Assim, no momento dois os 20 bezouros devem estar nos pontos pretos. Mas, existem apenas 18 pontos pretos. Portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, teremos pelo menos dois bezouros num mesmo ponto.
Observe que este argumento também funciona para os casos $n = 2$ e $n = 4$.

NÍVEL III

Pinta-se ou de vermelho ou de azul cada lado e diagonal de um polígono regular de n lados, com n ímpar maior do que ou igual a 3. Um movimento permitido é escolher um vértice do polígono e mudar a cor de todos os segmentos que partem daquele vértice, se for vermelho passa a ser azul e vice-versa.

Prove que, não importa como os vértice foram inicialmente pintados, fazendo uma sequência finita de movimentos permitidos, é possível tornar um número par a quantidade de segmentos azuis que partem de cada vértice.

SOLUÇÃO

Chamemos de grau azul de um vértice o número de segmentos azuis partindo daquele vértice. De modo análogo, chamemos de grau vermelho de um vértice o número de segmentos vermelhos partindo daquele vértices. Designaremos por grau total a soma do grau azul mais o grau vermelho. Como n é ímpar, o grau total é $n - 1$ que é par. Então os graus azul e vermelho são de mesma paridade. Isto faz com que, ao se aplicar uma operação permitida num vértice V, o grau azul de V mantém sua paridade enquanto o de todos os outros vértices vértices mudam de paridade. Por outro lado, a soma de todos os graus azuis é igual a duas vezes o número de segmentos de azuis e, portanto,é um número par. Portanto, o número k de vértices com grau azul k, é par. Se $k = 0$, não há o que fazer. Se $K \geq 2$, considere dois vérice A e B com graus azuis ímpar. Se você aplicar uma operação permitida em A e em seguida em B, tanto A como B terão grau azul par, enquanto todos os restantes vértices mudam de paridade duas vezes e, portanto, ficarão com os graus azuis da mersma paridade de antes das duas operações. Em outras palavras, o número de vértices com grau azul ímpar diminuiu em dois, e, dessa forma, continuando da mesma forma eventualmente podendo chegar a zero.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Consider um polinômio

$$P(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + \cdots + a_1x + a_0$$

Albert Einstein e Homer Simpson disputam o jogo seguinte. Cada um, na sua vez de jogar, escolhe um dos coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_{2011}$ e o substitui por um número real. Albert faz o primeiro movimento. Quando um coeficiente é substituído por um número real, ele não pode ser mais alterado. O jogo termina quando quando todos os coeficientes foram substiuídos por números reais. O objetivo de Homer é tornar o polinómio $P(x)$ divisível por um polinômio fixo $m(x)$.

(a) Qual do jogadores possui uma estratégia vencedora se $m(x) = x - 2012$?
(b) Qual do jogadores possui uma estratégia vencedora se $m(x) = x^2 + 1$?

SOLUÇÃO

Homer possui uma estratégia vencedora em ambos os casos (a) e (b).

(a) Homer vence se, e somente se,

$$P(2012) = 0 \Longleftrightarrow 2012^{2102} + a_{2011}2012^{2011} + a_{2010}2012^{2010} + \cdots + a_1 2012 + a_0 = 0 \quad (*)$$

Existem 2012 coeficientes para serem substituídos. Como Homer faz os movimentos de números pares, ele fará o movimento final. Mas, no último movimento o que sobra é uma equação linear do grau 1 em algum a_k, que sempre tem solução, garantindo a vitória de Homer.

(b) Para explicar a estratégia de Homer, definimos dois polinõmios

$$g(y) = a_0 + a_2y + a_4y^2 + \cdots + a_{2010}y^{1005} + y^{1006} \quad e \quad h(y) = a_1 + a_3y + a_5y^2 + \cdots + a_{2011}y^{1005}$$

Desta forma, P(x) = g(x^2) + $h(x^2).x$.

Homer vence se ele puder garantir que $g(y)$ e $h(y)$ são divisíveis por $y^2 + 1$. Isto é, Homer vence se $g(-1) = h(-1) = 0$

Agora, observe que, no início do jogo os polinômios $g(y)$ e $h(y)$ possuem um número par de coeficientes a ser substituídos.

A estratégia para Homer é seguir Albert em seus movimentos. Se Albert substituir um coeficiente de $g(x)$, Homer, no seu próximo movimento, substitui outro coeficiente em $g(x)$. Se Albert substitui um coeficiente de $h(x)$, Homer, no seu próximo movimento, substitui um coeficiente de $h(x)$.

Deste modo, Homer garante que ele substitui o último coeficiente em $g(x)$ e também em $h(x)$. Portanto, Homer pode sempre escolher os dois últimos coeficientes de modo que $g(-1) = h(-1) = 0$, o que garante sua vitória.