Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 22 - Data 25/09/2014

NÍVEL I

Uma fileira de formigas marcha ao longo de um caminho reto, todas elas com a mesma velocidade constante. A distância entre a primeira e a última formiga é de 15 metros. Existe uma formiga inspetora, que caminha com a mesma velocidade constante, para supervisionar o movimento das colegas, indo da última formiga da fileira à primeira formiga, daí retornando para encontrar novamente a última. Quando a formiga inspetora encontra a última formiga está exatamente a 8 metros do ponto onde ela iniciou seu percurso.

Determine que distância total a formiga inspetora percorreu no seu movimento de ida e volta, da última à primeira e novamente à última formiga.

SOLUÇÃO

Seja X a distância que percorre a última formiga enquanto a formiga inspetora vai desde ela até a primeira, e Y a distância total percorridas pela formiga inspetora no seu movimento total de ida e volta.

Quando a última formiga caminha X, a inspetora caminha no mesmo sentido que ela um total $X + 15$, pois 15 é a distância entre as duas extremidades da fileira.

Assim, a distância total percorrida pela formiga inspetora é igual a
$Y = (15 + X) + [15 - (8 - X)] = 22 + 2X$.

Como as formigas caminham com velocidades constantes, temos

$$\frac{X}{8-X} = \frac{15+X}{15-(8-X)} \Longrightarrow 7X + X^2 = 120 + 8X - 15X - X^2$$

$$\Longrightarrow 2X^2 + 14X - 120 = 0 \Longrightarrow X = \frac{-14 \pm 34}{4}.$$

Como X tem de ser positivo, $X = 5$. Portanto, $Y = 22 + 2X = 22 + 2 \times 5 = 22 + 10 = 32$ metros é a distância total que a formiga inspetora percorreu no seu movimento de ida e volta

NÍVEL II

Escrevem-se um número inteiro positivo em cada uma das faces de um cubo e a cada um dos vértices do cubo associa-se o produto dos números que aparecem nas faces adjacentes ao vértice.

Se a soma dos números associados aos vértices é 70, qual é a soma de todos os números que aparecem nas faces?

SOLUÇÃO

(México - 2004). A resposta é 14. Sejam a, b, c, d, e, f os números nas faces do cubo, de modo que a e d apareçam em faces opostas, o mesmo ocorrendo com b e f e c e f.

Pelos dados do problema, temos:

$$70 = abc + ace + aef + afb + dbc + dce + def + dfb = (a+d)(b+e)(c+f) \quad (*)$$

Por outro lado, a única fatoração de 70 como produto de três números inteiros maiores do que 1 é: $70 = 2 \times 5 \times 7$. Assim, os números $(a+b), (b+e)$ e $(c+f)$ em alguma ordem são $2, 5$ e 7. Portanto, $a + d + h + e + c + f = 2 + 5 + 7 = 14$ positivos.
Observação - Esta fatoração também se pode ver geometricamente, pois cada par de faces opostas possuem as mesma faces adjacentes. Por exemplo, as faces com os números a e d tem todas as outras adjacentes.

NÍVEL III

Seja n um número inteiro positivo para o qual vale a desigualdade seguinte:

$$n < (45 + \sqrt{1975})^{30} < n + 1$$

Mostre que n é um número ímpar.

SOLUÇÃO

Observe que

$$45-\sqrt{1975}=\frac{45^2-1975}{45+\sqrt{1975}}=\frac{2025-1975}{45+\sqrt{1975}}=\frac{50}{45+\sqrt{1975}}$$

Como $1975>1936=44^2$, segue que $\sqrt{1975}>44$. Logo, $(45+\sqrt{1975})>45+44=89$, o que implica

$$(45-\sqrt{1975})=\frac{50}{45+\sqrt{1975}}<\frac{50}{89}<1$$

Sejam $\alpha=(45+\sqrt{1975})^{30}$ e $\beta=(45-\sqrt{1975})^{30}$.

Desenvolvendo os binômios de Newton acima, temos:

$$\alpha=(45+\sqrt{1975})^{30}=45^{30}+\binom{30}{1}45^{29}\sqrt{1975}+\binom{30}{2}45^{28}(\sqrt{1975})^2+\cdots+(\sqrt{1975})^{30}$$

$$\beta=(45-\sqrt{1975})^{30}=45^{30}-\binom{30}{1}45^{29}\sqrt{1975}+\binom{30}{2}45^{28}(\sqrt{1975})^2-\cdots+(\sqrt{1975})^{30}$$

o que implica

$$\alpha+\beta=2\times\left[45^{30}+\binom{30}{2}45^{28}(\sqrt{1975})^2+\cdots+(\sqrt{1975})^{30}\right]$$

Como no desenvolvimento de $\alpha+\beta$ o termo $\sqrt{1975}$ comparece sempre elevado a um expoente par, segue que $\alpha+\beta$ é um inteiro e, é fácil concluir, é um inteiro par, pois a expressão de $\alpha+\beta$ está multiplicada por 2. Por outro lado, decorre do que vimos acima, $\beta<1$. Logo,

$$\alpha+\beta=(45+\sqrt{1975})^{30}+(45-(\sqrt{1975})^{30}<(45+\sqrt{1975})^{30}+1$$

.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $f\in C^{n+1}(\mathbb{R})$ e

$$ln\Big(\frac{f(b)+f'(b)+f''(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+f''(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}\Big)=b-a,$$

onde $a<b$.

Mostre que existe $c\in(a,b)$ tal que $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

SOLUÇÃO

A igualdade dada pode ser escrita como
$f(b) + f'(b) + f''(b) + \cdots + f^{(n)} = [f(a) + f'(a) + f''(a) + \cdots + f^{(n)}(a)] \times e^{b-a}$.

Agora, considere as funções $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x), \ onde \ f^0(x) = f(x) \ \ e$$

$$h(x) = e^{-x} g(x).$$

Temos que

$$h(a) = e^{-a}[f(a) + f'(a) + f''(a) + \cdots + f^{(n)}(a)]$$
$$h(b) = e^{-b}[f(b) + f'(b) + f''(b) + \cdots + f^{(n)}(b)]$$

Como $h(x) = e^{-x}g(x)$, podemos escrever

$$h(b) = e^{-b}[f(b)+f'(b)+f''(b)+\cdots+f^{(n)}(b)] = e^{-b}\times[f(a)+f'(a)+f''(a)+\cdots+f^{(n)}(a)]\times e^{b-a}$$
$$= h(a)$$

Assim, pelo Teorema de Roller, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

Como $h'(x) = -e^{-x}g(x) + e^{-x}g'(x)$ segue que $h'(c) = -e^{-c}g(c) + e^{-c}g'(c) = 0$. Portanto, $g'(c) = g(c)$ Como

$$g(c) = \sum_{k=0}^{n} f^{(n)}(c) = f(c) + f'(c) + f''(c) + \cdots + f^{(n)}(c) = g'(c)$$

e $g'(c) = f'(c) + f"(c) + f''(c) + \cdots + f^{(n)}(c) + f^{(n+1)}(c)$, concluímos que $f^{(n+1)}(c) = f(c)$, como queríamos provar.