
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escola,

Os Problemas Semanais são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, deixem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento, se sintam desafiados a resolvê-los e divirtam-se com as soluções.

Problemas semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço: www.ufrn.br/olimpiada/treinamento. Identificando os estudantes que resolveram os problemas, incentive-os a enviar suas soluções para serem publicadas na nossa página na internet. Encaminhe as soluções para: cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou bene@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br.

Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL No. 23 - Data 29/09/2014

NÍVEL I

Um professor de Matemática escreve no quadro-negro, em ordem crescente, a lista dos números inteiros positivos de 1 a 5.000 e pede para um estudante apagar todos os múltiplos de 5 e todos os múltiplos de 11.

Dos números que restaram, qual é o número na posição 2014?

SOLUÇÃO

A resposta é 2764 .

Observe que a cada 55 números da lista o estudante apaga 11 múltiplos de 5 e 4 múltiplos de 11, pois 55 é múltiplo de 5 e de 11 ao mesmo tempo. Isto significa que a cada 55 números da lista sobram exatamente 40. Por outro lado, $2014 = 40 \times 50 + 14$.

assim, para atingir 2014 números, o estudante deve ter chegado ao número $55 \times 50 + 14 = 2750 + 14 = 2764$.

Portanto, dos números que restaram, o número na posição de número 2014 é 2764.

NÍVEL II

Dado um inteiro positivo n, fazemos o seguinte procedimento: dividimos esse inteiro por 2, sem considerar os decimais; ao novo número fazemos o mesmo procedimento, e assim sucessivamente até obter o número 1.
Por exemplo, se $n = 115$, então necessitamos de 6 passos para atingir o número 1:

$$115 \to 57 \to 28 \to 14 \to 7 \to 3 \to 1$$

Aplicando esse procedimento, quantos inteiros positivos necessitam de 10 passos para atingir o número 1?

SOLUÇÃO

A resposta é 1024.

A idéia da contagem é olhar de trás para frente. No décimo passo do procedimento deve-se ter chegado ao número 2 ou ao 3. Agora, os que atinge o 2 no passo de número nove são dois: o 4 ou o 5, e os que atinge o 3 são também dois: o 6 ou o 7. Pensando desta maneira, podemos concluir que cada passo devemos multiplicar por 2 e o total de possibilidades é igual a

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2}_{10 \text{ fatores}} = 2^{10} = 1024$$

.

OBS. Também poderíamos pensar da forma seguinte. Os números n que levam de 1 a 10 passos para atingir o 1 são aqueles que na base 2 se escrevem da forma:

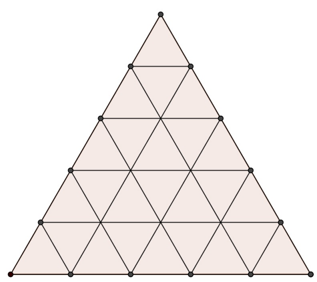
$$n = 2^{10} + x, \ com \ 0 < x < 2^{10}$$

Logo, n pode ser qualquer número que vai de $2^{10} = 1024$ até $2^{11} - 1 = 2047$.

Portanto, existem $2047 - 1024 + 1 = 1024$ números.

NÍVEL III

Um castelo tem a forma de um triângulo equilátero de lado 100. Ele é dividido em 100 salas triangulares, cada uma delas tendo a forma de um triângulo equilátero de lado medindo 10 metros.
Um mapa de um quarto deste castelo é mostrado a seguir

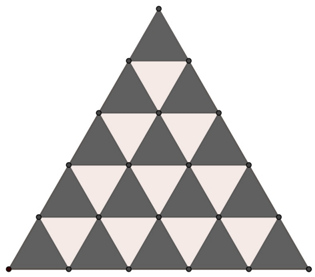


No meio da parede entre quaisquer duas salas vizinhas existe uma porta.

Se o visitante do castelo não pode passar duas vezes pela mesma sala, encontre o número máximo de salas que ele pode passar numa única visita.

SOLUÇÃO

Vamos resolver o problema no caso geral, quando o número de salas é k^2 em vez de 100, onde k é um número inteiro positivo.
Pintemos as salas de preto e branco, como na figura a seguir



O número de salas pintadas de preto é igual a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} \times k(k+1) = \frac{1}{2} \times (k^2 + k)$$

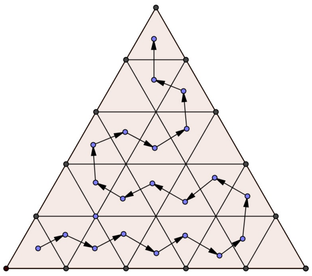
Segue que o número de salas pintadas de branco é iguala a

$$k^2 - \frac{1}{2} \times (k^2 + k) = \frac{1}{2} \times (k^2 - k)$$

Quando o visitante caminha pelo castelo, ele vai de uma sala de uma cor para vizinha de outra cor. Isto significa que ele vai sucessivamente de uma sala preta para uma branca e vice-versa. Mas, como o visitante pode ir a no máximo todas as $\frac{1}{2} \times (k^2 - k)$ salas brancas, então ele pode visitar no máximo $\frac{1}{2} \times (k^2 - k) + 1$ salas pretas. Logo, o visitante pode visitar um total de salas igual a

$$\frac{1}{2} \times (k^2 - k) + \frac{1}{2} \times (k^2 - k) + 1 = k^2 - k + 1$$

No problema, $k = 10$. Portanto, o visitante pode ir a no máximo em $10^2 - 10 + 1 = 91$ salas.
Na figura a seguir, mostramos um roteiro possível para o caso $k = 5$, onde o número de salas visitadas é igual $5^2 - 5 + 1 = 21$



NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Qual é o posto mínimo e máximo possível de uma matriz $n \times n$ cujas entradas são precisamente os números $1, 2, 3, \cdots, n^2$?

SOLUÇÃO

O posto é no mínimo 2 e o posto máximo é n.
Para provar que o posto mínimo é 2, vamos mostrar que não pode ser 1.
Considere uma matriz qualquer $A = (a_{ij})$ cujas entradas são os números $1, 2, 3, \cdots, n^2$ em alguma ordem. Como permutando linhas e colunas não muda o posto, podemos supor que as entradas da primeira coluna e da primeira linha satisfazem:

$$1 < a_{11} < a_{21} < a_{31} < \cdots < a_{n1} \quad e \quad a_{11} < a_{12} < a_{13} < \cdots < a_{1n}$$

Assim, $a_{1n} \geq 1$ e $a_{n1} \geq 1$, e no mínimo uma dessas desigualdades é estrita. Logo, temos:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} < 1.n^2 - n.n = 0$$

Portanto, o posto de A satisfaz:

$$Posto(A) \ \geq \ Posto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 2$$

Agora, vamos mostrar que o posto pode ser 2. Para isso, considere a matriz T dada por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 3n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Observe que na matriz T a $i-$ésima linha é a soma dos vetores
$(1, 2, 3, \cdots, n) + n(i-1).(1, 1, 1, \cdots, 1)$. Isto significa que cada linha está no subespaço de dimensão 2 gerada pelos vetores $(1, 2, 3, \cdots, n)$ e $(1, 1, 1, \cdots, 1)$. Mas, acima já mostramos que o posto é no mínimo 2. Portanto, $posto(T) = 2$.

Finalmente, vamos mostrar que o posto pode ser n. De fato, colocando todos as entradas da diagonal principal como sendo números ímpares, acima da diagonal somente números pares e abaixo da diagonal números ímpares e números pares, teremos o posto da matriz um número ímpar. Portanto, a matriz é invertível, o que significa dizer que o posto é n.