OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

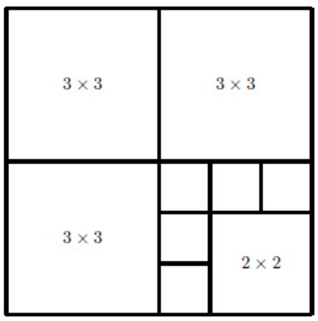
SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL N$^{\underline{o}}$ 01 - Data 02/03/2015

NÍVEL I

O professor de Matemática entrega para Joãzinho uma folha de cartolina com um desenho de um quadrado 6×6 e propõe o seguinte desafio. Joãozinho tem de cortar o quadrado em nove quadrados e pintar um deles de branco, três de cinza e cinco deles de preto, de tal modo que quadrados de mesma cor tenham as mesmas medidas e quadrados de cores distintas sejam de medidas diferentes. Joãozinho vai conseguir resolver o desafio? Explique.

SOLUÇÃO

Joãzinho vai conseguir.
A solução não é única. A figura a seguir mostra um exemplo de como cortar um quadrado 6×6 em um quadrado 2×2, três quadrados 3×3 e cinco quadrados 1×1.



NÍVEL II

Dois jogadores, **A** e **B**, disputam um jogo num tabuleiro 10×10, jogando alternadamente. O jogador A possui uma lata de tinta azul e o jogador **B** uma lata de uma tinta vermelha. O jogador **A** começa. Na sua vez de jogar, cada jogador escolhe uma linha ou coluna do tabuleiro que não tenha sido previamente escolhida por qualquer um dos dois e pinta suas 10 casas com sua própria cor. Se qualquer uma destas casas escolhidas já estava pintada, a nova cor cobre a anterior. Após 20 jogadas, quando não há mais as linhas e colunas disponíveis, o jogo termina. Então conta-se o número de casas de cada cor e determina-se o vencedor de acordo com a seguinte regra: se o número de casas vermelhas exceder a dez mais do que a quantidade de casas azuis, então o jogador **B** vence. Caso contrário, o jogador **A** ganha.
Determinar se um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora e explicar a estratégia.

SOLUÇÃO

O jogador **B** possui uma estratégia vencedora.
Cada vez que o jogador **A** fizer seu movimento, o jogador **B** escolhe uma linha ou coluna perpendicular à escolhida por **A** no movimento anterior. Para provar que esta estratégia é vencedora, basta observar que cada casa do tabuleiro é pintada exatamente duas vezes, uma quando um jogador escolhe a linha em que está localizada a casa e a outra quando um escolhe a coluna. Assim, após as duas primeiras jogadas uma única casa fica com sua cor final e esta é vermelha. Depois da terceira e quarta jogadas, três novas caixas atingem sua cor final, e das quais duas serão vermelhas e uma será azul. Em geral, após o movimentos $2k-1$ e $2k$ existem $2k-1$ novas casa que atingiram suas cores finais, das quais $k-1$ serão azuis e k vão ser vermelhas. Como a cada duas jogadas a quantidade de casas vermelhas aumenta em um, ao final o jogador **B** terá uma vantagem de 10 casas sobre o jogador **A**, vencendo o jogo.

NÍVEL III

Considere a matriz quadrada A de ordem 100×100:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 99 & 100 & 1 & \cdots & 97 & 98 \\ 100 & 1 & 2 & \cdots & 98 & 99 \end{pmatrix}$$

na qual é permitido somar ou diminuir o mesmo número a todos os elementos de uma mesma linha ou coluna.
Aplicando operações deste tipo, é possível obter de A uma matriz com todas entradas iguais?
SOLUÇÃO

Seja $C(i,j)$ a entrada da matriz que está na i-ésima linha e j-ésima coluna.
Observe que o número

$$I = C(1,1) - C(1,100) - C(100,1) + C(100,100)$$

é um **invariante**, isto é, não se altera quando aplicamos a operação permitida. Agora, na posição inicial o valor de I é:

$$I = 1 - 100 - 100 + 99 = -100.$$

Mas, em qualquer matriz com todos as entradas iguais teríamos $I = 0$. Portanto, a resposta é **não**.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Turbo, o caracol, está participando de uma corrida. Nos últimos 1000 mm, Turbo, que está a 1 mm por hora, se motiva e passa a correr de modo que sua velocidade seja inversamente proporcional à distância que falta. Em quanto tempo Turbo percorre esses 1000 mm finais?
Obs.: Suponha que Turbo pode atingir velocidades arbitrariamente altas, mesmo que sejam maiores que a da luz.
SOLUÇÃO

Seja $x(t)$ a distância que falta para Turbo terminar a corrida no instante t. Então $x(0) = 1000$, a velocidade de Turbo é $\frac{1000}{x}$ e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1000}{x} \implies xdt = -1000dt \implies \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x(0)}^{x} = -1000\Big|_0^x \iff$$

$$\iff x^2 - 1000^2 = -2000t \iff x = \sqrt{1000^2 - 2000t}.$$

Portanto, $x = 0$ quando $t = 500$.