OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 02 - Data 09/03/2015

NÍVEL I

Se os comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo são 3 cm e 4 cm, respectivamente, qual é o comprimento mínimo possível para o terceiro lado?

SOLUÇÃO

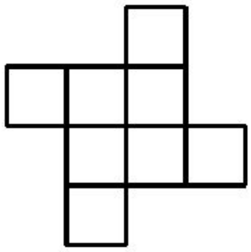
Sabemos que num triângulo retângulo qualquer existe um lado cujo comprimento é maior do que o comprimento de cada um dos outros dois lados. A idéia é usar o Teorema de Pitágora.
O Teorema de Pitágoras afirma: Num triângulo retângulo, o quadrado do comprimento do maior lado (hipotenusa) é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos dois outros lados (catetos).
Assim, temos dois casos a considerar:

- o outro lado do triângulo é a hipotenusa;
- o outro lado **não** é a hipotenusa.

Se o outro lado é a hipotenusa. Se x é o comprimento da hipotenusa, então $x^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, o que implica $x = 5$.
Se o outro lado não é a hipotenusa. Neste caso, se y é o comprimento do outro lado, temos, necessariamente, que o comprimento da hipotenusa é igual a 4. Assim, $3^2 + y^2 = 4^2$, que é o mesmo que $y^2 = 4^2 - 3^2 = 7$, o que implica $y = \sqrt{7}$, que é a resposta ao problema, pois esse é o menor valor possível.

NÍVEL II

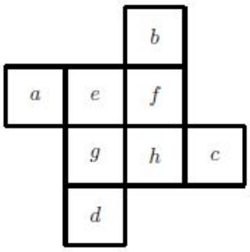
A figura a seguir representa a pá de um moinho.



(a)Coloque os números $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 nos quadrados da figura acima, sem repetir, de modo que em cada pá do moinho a soma seja a mesma.
(b) Verifique se é possível colocar os números $6, 7, 8$ e 9 nos quadrados centrais. Caso seja possível, mostre

como, e, se não for, explique porquê.
(c) Verifique se é possível colocar os números $5, 6, 8$ e 9 nos quadrados centrais. Caso seja possível, mostre como, e, se não for, explique porquê.
(d) Verifique se é possível colocar os números $4, 5, 6$ e 9 nos quadrados centrais. Caso seja possível, mostre como, e, se não for, explique porquê.
SOLUÇÃO

(a) Sejam a, b, c, d, e, f, g, h os números colocados nos quadrados que compõem a pá, de modo que constituam uma solução do problema, veja figura a seguir.



Assim, a soma dos números nas quatro pás é igual a

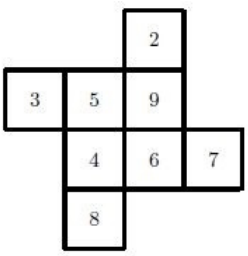
$$S = (a+e+f)+(b+f+h)+(c+h+g)+(d+g+e)$$

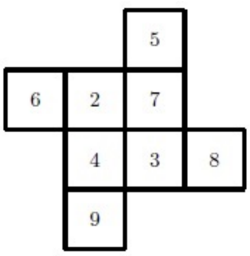
$$S = (a+b+c+d)+2(e+f+g+h)$$

que deve ser um múltiplo de 4, pois as somas dos números em cada pá é a mesma.
Por outro lado, $S = (2+3+4+5+6+7+8+9)+(e+f+g+h) = 44+(e+f+g+h)$ é um múltiplo de 4. Logo, a soma $e+f+g+h$ deve ser, também, um múltiplo de 4. Agora, observe que o **maior valor possível** para $e+f+g+h$ ocorre em $9+8+7+4 = 28$ e o **menor valor possível** para $e+f+g+h$ ocorre em $2+3+4+7 = 16$. Então os possíveis valores para $e+f+g+h$ são $16, 20, 24, 28$ (todos múltiplos de 4).
Portanto, a soma dos números em cada pá pode assumir os seguintes valores:

- $(44+16) \div 4 = 15$ ou
- $(44+20) \div 4 = 16$ ou
- $44+24) \div 4 = 17$ ou
- $(44+28) \div 4 = 18$.

Mostramos a seguir duas maneiras de colocar os números $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 nos quadrados da figura acima, sem repetir, de modo que em cada pá do moinho a soma seja a mesma. Existem outras soluções possíveis.





(b) Neste caso, a resposta é **não**, pois a soma $6+7+8+9 = 30$ não é múltiplo de 4
(c) A resposta é não.
De fato, se colocamos os números $5, 6, 8, 9$ no quadrado central da figura dada, temos que $5+6+*+9 = 28$ e em cada pá a soma deve ser 18. Neste caso, os números 8 e 9 devriam estar em diagonal, caso contrário

necessitaríamos de um 14 para que a soma seja 18. Mas, não temos o número 1 entre os números dados. Daí, segue que: ou 5 ou 8 terão de estar na mesma pá, o que é impossível, pois para que a soma dessa pá fosse 18, precisaríamos repetir o número 5, ou 6 e 8 ficariam na mesma pá e 5 e 9 ficarão juntos em outra pá, o que também é impossível, pois precisaríamos repetir o número 4 para que a soma das duas pás fosse igual a 18.

(d) Sim. Veja na primeira figura dada no item (a) que os números $4, 5, 6$ e 9 aparcem nos quadrados centrais.

NÍVEL III

Numa sequência, o primeiro termo é 2015. O segundo termo é igual ao primeiro dividido por 1 mais o primeiro termo. O terceiro termo da sequência é igual ao segundo termo dividido por 1 mais o segundo termo. Cada termo da sequência é igual ao antecessor divididido por 1 mais o antecessor.

Qual é o 2015-ésimo termo da sequência?

SOLUÇÃO

Pelo enunciado da questão temos que $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$, para todo número inteiro positivo n. Assim, podemos escrever $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1+a_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_n} + 1$.

Usando a expressão acima, temos que:

$\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{2015}$.

$\dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{a_1} + 1 = \dfrac{1}{2015} + 1$.

$\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{1}{a_2} + 1 = (\dfrac{1}{a_2} + 1) = (\dfrac{1}{2015} + 1) + 1 = \dfrac{1}{2015} + 2$.

$\dfrac{1}{a_4} = \dfrac{1}{a_3} + 1 = (\dfrac{1}{a_3} + 1) = (\dfrac{1}{2015} + 2) + 1 = \dfrac{1}{2015} + 3$.

Por indução, é fácil ver que,

$$\frac{1}{a_{2015}} = \frac{1}{2015} + 2014 = \frac{1 + 2014 \times 2015}{2015} = \frac{1 + 4.058.210}{2015} = \frac{4.058.211}{2015}$$

Portanto, $a_{2015} = \dfrac{2015}{4.058.211}$.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Para cada n inteiro, com $n > 2$, considere as $n-1$ frações:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}$$

O produto destas frações é igual a n, mas se você inverter (ou seja, virar de cabeça para baixo) algumas das frações, o produto mudará. Você pode tornar o produto igual a 1? Encontrar todos os valores de n para o qual isto é possível e prove que de fato são só esses.

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que isso é possível, exatamente quando n é um quadrado perfeito maior que 1.

Suponha que possamos inverter algumas das frações para que o produto resultante seja 1. Vamos mostrar que n é um quadrado perfeito.

De fato, sejam r o produto das frações que iremos inverter e t o produto das frações que não são invertidas. Assim, temos:

$$r \times t = n \qquad e$$

$$\frac{1}{r} \times t = 1.$$

Multiplicando membro a membro ambas as igualdades, obtemos:

$$t^2 = n.$$

Portanto, n é o quadrado de um número racional, o que implica que n é um quadrado perfeito.
Agora, suponha que n seja um quadrado perfeito: $n = a^2$. Neste caso, invertemos as primeiras $a-1$ frações:

$$\underbrace{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{a}{a-1}}, \frac{a+1}{a}, \frac{a+2}{a+1}, \dots, \frac{a^2}{a^2-1}.$$

Ao invertermos as primeiras $a-1$ frações, obtemos o produto

$$(\frac{1}{2}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{3}{4}) \times \cdots (\frac{a-1}{a}) \times (\frac{a+1}{a}) \times (\frac{a+2}{a+1}) \times \cdots \times (\frac{a^2}{a^2-1}) = (\frac{1}{a}) \times (\frac{a^2}{a}) = 1,$$

o que prova que podemos modificar o produto, invertendo alguns termos, para obter o produto igual a 1.