OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

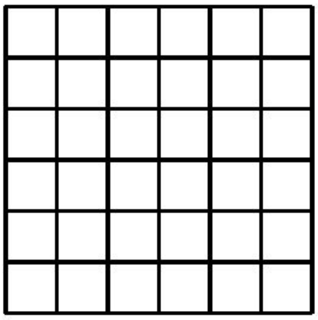
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL N$^{\underline{o}}$ 03 - Data 16/03/2015

NÍVEL I

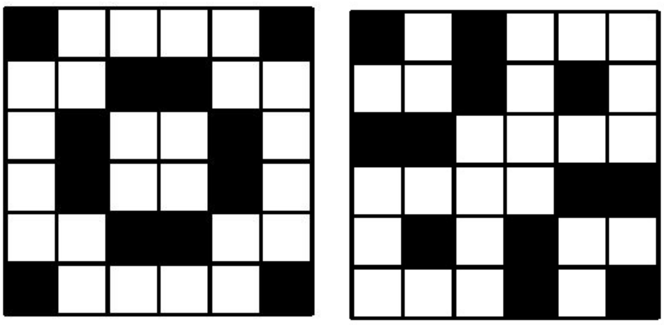
O professor de Matemática de Joãzinho apresenta um tabuleiro 6×6, veja Figura a seguir,



e propõe o seguinte desafio:
Joãozinho tem de pintar de preto doze casas do tabuleiro, de modo que em cada linha e em cada coluna apareça somente duas casas pintadas e não mais do que duas em quaisquer casas em diagonal.
Joãozinho vai conseguir resolver o desafio? Se sim, mostre como. Se não, explique porque.

SOLUÇÃO

Joãozinho vai resolver o desafio.
Ajuda se você divide o tabuleiro em quatro sub-tabuleiros 3×3, trabalha num desses sub-tabuleiros e, em seguida, usa reflexão em torno das retas que dividem o tabuleiro e torno de seu centro. Apresentamos duas soluções a seguir.



<u>NÍVEL II</u>

Um tabuleiro 36×90 tem as bordas espelhadas. Um raio luminoso é emitido de um dos vértices do tabuleiro, fazendo um ângulo de 45^o com as bordas
Quantas casas do tabuleiro serão atravessadas pelo raio até colidir pela primeira vez com um vértice?

SOLUÇÃO

O número da casas atravessadas é 180.
Observe que, para um raio atingir um vértice do tabuleiro deve atingir ao mesmo tempo uma parede vertical e uma parede horizontal.
A primeira colisão em uma parede vertical se dá após terem sido atravessadas 36 casas. A segunda colisãoem uma parede vertical se dá após terem sidos atravessadas mais 36 casas etc...
De modo análogo, a primeira colisão em uma parede horizontal se dá após terem sido atravessadas 90 casas. A segunda colisão em uma parede horizontal se dá após terem sidos atravessadas mais 90 casas etc.
A primeira colisão em um vértice do tabuleiro se dá após terem sidos atravessadas casas em uma quantidade que é ao mesmo tempo múltiplo de 36 e de 90. Como o Mínimo Múltiplo Comum de 36 e 90 é 180, a primeira colisão em um vértice se dá após terem sido atravessadas 180 casas.

<u>NÍVEL III</u>

Considere o conjunto S de todas as frações racionais positivas cujo denominador é 24 e cujo numerador é menor do que 26 e relativamente primo com 24.
Quantos são os subconjuntos não vazios de S que possui a propriedade de que a soma de todos os seus elementos é uma fração irredutível?

SOLUÇÃO

A resposta é 231.
Inicialmente, observe que S é um conjunto com 9 elementos:

$$S = \{\frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{13}{24}, \frac{17}{24}, \frac{19}{24}, \frac{23}{24}, \frac{25}{24}\}.$$

Assim, S possui $2^9 = 512$ subconjuntos, mas aqueles com um número par de elementos terão a soma de seus membros igual a $\frac{M}{24}$, com M um número par (soma de uma quantidade par de números ímpares), o que significa que a fração $\frac{M}{24}$ **não** é irredutível.
Logo, vamos nos restringir aos subconjuntos com um número ímpar de elementos. Ou seja, vamos nos limitar a trabalhar com os subconjuntos de S que possuem $1, 3, 5, 7$ e 9 elementos.
Agora, observe que a fração $\frac{M}{24}$ tem de ser tal que o numerador M seja a soma de uma quantidade ímpar de elementos do conjunto $T = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25\}$, com M relativamente primo com 24.
Também, é oportuno observar que 5 dos elementos do conjunto T são da forma $3k+1$, com k um número inteiro. Ou seja, os elementos de T da forma $3k+1$ formam o conjunto $A = \{1, 7, 13, 19, 25\}$. Chamemos de B a coleção dos outros 4 elementos de T: $B = \{5, 11, 17, 23\}$. É fácil ver que todo elemento de B é da forma $3k+2$, com k um número inteiro.
A seguir, vamos contar quantos são os subconjuntos satisfazendo as hipóteses do problema. Faremos a contagem dos subconjuntos satisfazendo as hipóteses do problema pela quantidade de elementos que eles possuem.

$\boxed{Subconjuntos\ com\ 1\ elemento}$

É fácil ver que todos os subconjuntos com um só elemento satisfaz ao problema. Neste caso, existem 9 subconjuntos.

$\boxed{Subconjuntos\ com\ 3\ elementos}$

Os elementos de qualquer subconjunto com três elementos satisfazendo ao problema **não** pode ter 3 elementos em A, pois teríamos com soma um múltiplo de três, que não é relativamente primo com 24, nem pode ter 3 elementos em B, pois teria como soma um múltipo de 3.
Logo, neste caso, teríamos um total de subconjuntos igual a:

$$\binom{9}{3}-\binom{5}{3}-\binom{4}{3}=84-10-4=70.$$

$\boxed{Subconjuntos\ com\ 5\ elementos}$

Neste caso, vamos eliminar todos os subconjuntos que contém 4 elementos de A e 1 elemento de B, pois a soma seria um múltiplo de 3, ou qualquer subconjunto que possui 3 elementos de A e 2 elementos de B, pois a soma seria um múltiplo de 3.
Assim, neste caso a quantidade total de subconjuntos satisfazendo as hipóteses do problema será:

$$\binom{9}{5}-\binom{5}{4}\times\binom{4}{1}-\binom{5}{1}\times\binom{4}{4}=126-20-5=121$$

$\boxed{Subconjuntos\ com\ 7\ elementos}$

Neste caso, vamos eliminar todos os subconjuntos que contém 5 elementos de A e 2 elemento de B, pois a soma seria um múltiplo de 3
Assim, neste caso, teríamos uma quantidade total de subconjuntos igual a:

$$\binom{9}{7}-\binom{5}{5}\times\binom{4}{2}=36-6=30.$$

$\boxed{Subconjuntos\ com\ 9\ elementos}$

Neste caso, existe somente 1 subconjunto, o próprio S.
Portanto, o total de subconjuntos pedido é igual a $9+70+121+30+1=231$.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja S_n a soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos ímpares. Qual é o dígito das unidades de S_{12345}?

SOLUÇÃO

A resposta é 5.
Vamos mostrar por indução que $S_{5n}=5n+10k_n$, onde, para cada n, k_n é um número inteiro positivo.
Observe que $S_5=1^2+3^2+5^2+7^2+9^2=165=5+10\times 16$. Suponha que o resultado seja válido para $n>1$. Vamos mostrar que o mesmo vale para $n+1$. Temos que $S_{5(n+1)}$ é igual a

$$S_{5(n+1)}=S_{5n+5}=\underbrace{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+\cdots+(10n-1)^2}_{S_{5n}}+(10n+1)^2+\cdots+10n+9)^2,$$

onde a soma das parcelas $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+\cdots+(10n-1)^2=S_{5n}$, o que nos permite escrever:

$$S_{5(n+1)}=S_{5n}+(10n+1)^2+\cdots+(10n+9)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$S_{5(n+1)}=S_{5n}+10j_n+(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2),\ onde\ j_n\ é\ um\ inteiro\ positivo,$$

ou ainda

$$S_{5(n+1)}=S_{5n}+10j_n+165=5n+10k_n+10j_n+160+5=5(n+1)+10(k_n+j_n+16)=5(n+1)+10k_{n+1},$$

onde $k_{n+1}=k_n+j_n+16$, o que conclui a prova.
Portanto, $S_{12345}=5\times 2469+10k_n$, que possui o dígito das unidades igual ao dígito das unidades de 5×2469, que é 5.