OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

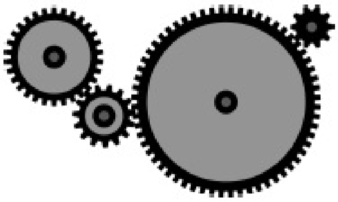
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 04 - Data 23/03/2015

NÍVEL I

Temos 4 engrenagem montadas em eixos fixos e conectados cada um com o seguinte, como mostra a Figura a seguir.



Contadas da esquerda para à direita, a primeira engrenagem possui 30 dentes, a segunda 15, a terceira 60 dentes e a última 10.
Quantas voltas faz a última engrenagem quando primeira dá uma volta completa?

SOLUÇÃO

A resposta é 3.
Quando a primeira engrenagem dá uma volta, a segunda dá $\frac{30}{15} = 2$ voltas, a terceira dá $2 \times \frac{15}{60} = \frac{1}{2}$ volta e a quarta dá $\frac{1}{2} \times \frac{60}{10} = 3$ voltas.

NÍVEL II

Em uma caixa azul existem 12 bolinhas, numeradas de 1 até 12. Henrique movimenta algumas destas bolinhas, mas não todas, para outra caixa verde. Ao fazer esse movimento se dá conta de que, para as bolinhas da caixa verde, o seguinte é verdadeiro: *se duas bolinhas estão numeradas com a e b, então a bolinha marcada com $|a-b|$ está na caixa azul.*
Qual é a maior quantidade de bolinhas que Henrique pode mover para a caixa verde?

SOLUÇÃO

A resposta é 6.
Se Henrique move todas as bolinhas marcadas com números ímpares $(1,3,5,7,9,11)$, então a diferença entre dois desses números é um número par e está, por hipótese, na caixa azul.
Também é possível mover as bolinhas numeradas de 7 a 12, cujas diferenças estão compreendidas entre 1 e 5 e, por hipótese, estão na caixa azul.

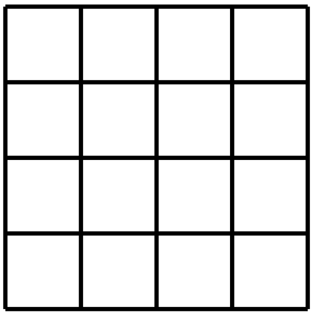
Agora, suponha que Henrique moveu 7 bolinhas, numeradas com $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Assim, as diferenças:

$$(a_7 - a_1, (a_6 - a_1), (a_5 - a_1), (a_4 - a_1), (a_3 - a_1), (a_2 - a_1)$$

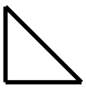
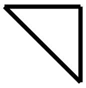
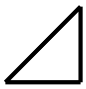
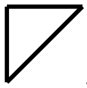
são seis inteiros positivos distintos e menores do que 12. Então estas bolinhas deveriam estar na caixa azul, mas isso é impossível pois alí só existem 5 bolas.

<u>NÍVEL III</u>

Deseja-se cobrir um tabuleiro 4×4, veja Figura a seguir,



com 16 triângulos pretos e 16 triângulos brancos, cada um deles de uma das formas seguintes:

 ou  ou  ou  .

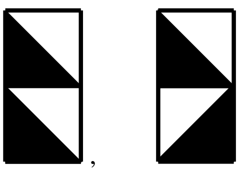
Isto é, cada um deles ocupando a metade de uma casa do tabuleiro.
De quantos modos distintos isso pode ser feito, se não podemos colocar dois triângulos de uma mesma cor tendo um lado em comum?

SOLUÇÃO

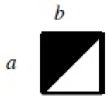
A resposta é 256.
Para cobrir a casa do canto superior esquerdo do tabuleiro temos quatro opções:

Escolhida uma das alternativas, por exemplo, a primeira, só há duas alternativas para cobrir a casa seguinte nesta mesma linha:

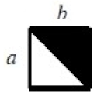
De modo análogo, só há duas opções para cobrir a casa seguinte na mesma coluna:



Então existem $4 \times 2^3 \times 2^3 = 256$ opções para cobrir as casas da primeira linha e da primeira coluna. A partir daí, todas as outras casas ficam unicamente determinadas, pois se em uma casa seus lados a e b pertencem a triângulos de mesma cor, digamos branco, então devemos colocar os triângulos desta casa assim:



Se a e b pertencerem a triângulos de cores distintas, digamos a preto e b branco, a disposição deve ficar assim:



NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Uma moeda é lançada 10 vezes. Encontrar a probabilidade de que duas coroas não apareçam uma após a outra.

SOLUÇÃO

Após lançar uma moeda, existem duas maneiras da face para cima se apresentar: cara (C) ou coroa (K). Logo, existem $2^{10} = 1024$ maneiras distintas de se observar a moeda após 10 lançamentos. Isto é, o espaço amostral possui 1024 elementos.
Temos que encontrar a quantidade de eventos favoráveis. Para isso, sejam:

- H_n a quantidade de n lançamentos os quais não aparecem duas ou mais coroas em seguidas, mas terminando com uma cara (C);
- T_n a quantidade n lançamentos os quais não aparecem duas ou mais coroas em seguidas, mas terminando com uma coroa.

Assim, a quantidade de eventos favoráveis, que queremos calcular é, $H_{10} + T_{10}$.
Inicialmente, observe que é fácil ver que:

- $H_1 = 1$, pois o conjunto de 1 lançamento possível no qual não aparecem duas coroas seguidas e terminam em cara é $\{C\}$.
- $H_2 = 2$, pois o conjunto dos 2 lançamentos possíveis nos quais não aparecem duas coroas seguidas e terminam em cara é $\{CC, KC\}$.
- $H_3 = 3$, pois o conjunto dos 2 lançamentos possíveis nos quais não aparecem duas coroas seguidas e terminam em cara é $\{CCC, KCC, CKC\}$.
- $T_1 = 1$, pois o conjunto de 1 lançamento possível no qual não aparecem duas coroas seguidas e terminam em coroa é $\{K\}$.
- $T_2 = 1$, pois o conjunto dos 2 lançamentos possíveis nos quais não aparecem duas coroas seguidas e terminam em coroa é $\{CK\}$.
- $T_3 = 2$, pois o conjunto dos 3 lançamentos possíveis nos quais não aparecem duas coroas seguidas e terminam em coroa é $\{KCK, CCK\}$.

Agora, considere $n \geq 3$.
Se da quantidade de todos os n lançamentos possíveis nos quais não aparecem duas coroas consecutivas e que terminam em coroa, eliminamos o resultado do último lançamento, temos a quantidade de todos os $n-1$ possíveis lançamentos que não aparecem duas coroas consecutivas e terminam necesariamente em cara. Isto significa que:

$$T_n = H_{n-1}$$

Podemos concluir também que, para $n \geq 3$, temos

$$H_n = H_{n-1} + T_{n-1} = H_{n-1} + H_{n-2}$$

Assim, aplicando a última relação obtida, temos:

$$H_3 = H_2 + H_1 = 2 + 1 = 3;$$

$$H_4 = H_3 + H_2 = 3 + 2 = 5;$$

$$H_5 = H_4 + H_3 = 5 + 3 = 8;$$

$$H_6 = H_5 + H_4 = 8 + 1 = 13;$$

$$H_7 = H_6 + H_5 = 13 + 8 = 21;$$

$$H_8 = H_7 + H_6 = 21 + 13 = 34;$$

$$H_9 = H_8 + H_7 = 34 + 21 = 55;$$

$$H_{10} = H_9 + H_8 = 55 + 34 = 89.$$

Assim, a quantidade de eventos favoráveis é igual a

$$H_{10} + T_{10} = H_{10} + H_9 = 89 + 55 = 144.$$

Portanto, a probabilidade, P, pedida é igual a

$$P = \frac{144}{1024} = \frac{9}{64}.$$