OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 05 - Data 30/03/2015

NÍVEL I

Clara sobe escada de um ou dois degraus de cada vez, mas nunca sobe três ou mais degraus de uma só vez. De quantos modos ela pode subir uma escada de 10 degraus pisando obrigatoriamente no sexto degraus?
SOLUÇÃO

Para atingir o sexto degrau ela pode ir:

- pisando de dois em dois degraus: $2+2+2$ (1 maneira de subir);
- subindo duas vezes de dois em dois degraus e duas vezes de um degrau: $2+2+1+1$ (variando a ordem, temos 6 maneiras distintas de subir);
- subindo uma vez de dois degraus e o restante de um em um: $2+1+1+1+1$ variando a ordem, temos 5 maneiras distintas de subir);
- subind de um em um degrau $1+1+1+1+1+1$ (1 maneira de subir).

Assim, Clara tem $1+6+5+1=13$ modos de alcançar o sexto degrau.
De modo análogo, é fácil ver que ela pode ir do sexto ao décimo degrau de

- 2 + 2 (1 maneira de subir);
- 2 + 1 + 1 (3 maneiras distintas de subir);
- 1 + 1 + 1 + 1 (1 maneira de subir).

Logo, para ir do sexto ao décimo degrau Clara pode ir de $1+3+1=5$ maneiras distintas.
Portanto, como as maneiras de subir do primeiro degraus ao sexto independe dos modos de subir do sexto degraus ao décimo, temos que a resposta é $13 \times 5 = 65$.

NÍVEL II

Quando Paulo fez 15 anos, convidou 43 amigos para uma festa. O bolo tinha a forma de um polígono regular de 15 lados e havia 15 velas sobre ele.
As velas foram colocadas de tal maneira que não havia três velas em linha reta.
Paulo dividiu o bolo em pedaços triangulares onde cada corte ligava duas velas ou ligava uma vela a um vértice. Além disso, nenhum corte cruzou outro já realizado.
Explique por que, ao fazer isso, Paulo pode dar um pedaço de bolo a cada um de seus convidados mas ele próprio ficou sem comer.

SOLUÇÃO

Seja n o número de triângulos em que se pode dividir o bolo com as condições dadas. Somaremos os ângulos interiores destes triângulos de duas formas:

- (1) $180^o \times n$;
- (2) $360^o \times 15 + 180^o \times (15-2)$.

Cada ponto interior (vela) contribui com 360^o, e a soma dos ângulos interiores de um polígono convexo de L lados é igual a $180^o \times (L-2)$.
Portanto, $180^o \times n = 360^o \times 15 + 180^o \times 13$, o que implica $n = 43$.
Como são 43 convidados e mais ele próprio, Paulo fica sem comer.

NÍVEL III
Determine o valor mínimo de $|36^m - 25^n|$, onde m e n inteiros positivos.
SOLUÇÃO

A resposta é 11.
Inicialmente, observe que, para quaisquer inteiros positivos m e n os números 36^m e 25^n terminam em 6 e 5, respectivamente (i.e. o algarismo das unidades são 6 e 5, respectivamente). Logo, se $36^m > 25^n$, a diferença $36^m - 25^n$ termina em 1. Por outro lado, se $36^m < 25^n$, a diferença $36^m - 25^n$ termina em 9.
Assim, o conjunto dos valores absolutos da diferença $36^m - 25^n$ está contido no conjunto $\{1, 9, 11, 19, \cdots\}$.
Vamos mostrar que $|36^m - 25^n|$ não pode 1 nem 9 e, também, dar um exemplo onde $|36^m - 25^n| = 11$.

- Observe que $36^m - 25^n$ **não** pode ser 1, pois $36^m - 25^n = 1$ implica que $25^n = 36^m - 1$, que é o mesmo que $5^{2n} = 6^{2m} - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$, o que é uma contradição, pois o fator $6^m + 1$ é um número terminado em 7, não sendo, portanto, uma potência de 5.
- $36^m - 25^n$ **não** pode ser igual a 9, pois $25^n - 36^m = 9$ implica que $5^{2n} = 36^m + 9$ é um múltiplo de 9 e, portanto, não pode ser uma potência de 5.
- Para $m = n = 1$, temos $36^m - 25^n = 11$.

Portanto, o valor mínimo de $|36^m - 25^n|$ é 11.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO
Considere a sequência de números reais dada por:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1\ e\ para \geq 3,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Encontre:
(a) Uma fórmula para a_n.
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$
SOLUÇÃO

(a) Observe que:

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) = (n-1)(a_{n-1}) + (n-1)a_{n-2} = na_{n-1} - a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \Longrightarrow$$

$$a_n - na_{n-1} = -a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \Longrightarrow$$

$$a_n - na_{n-1} = -[a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}]$$

Fazendo

$$n = 3,\ temos\ a_3 - 3a_2 = -1;$$

$$n = 4,\ temos\ a_4 - 4a_3 = +1;$$

. . . .

Concluímos que

$$a_n - na_{n-1} = (-1)^n. \qquad (*)$$

Dividindo ambos os lados de $(*)$ por $n!$, temos

$$\frac{a_n}{n!} - \frac{na_{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=2}^{n} \left(\frac{a_r}{r!} - \frac{a_{r-1}}{(r-1)!} \right) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \qquad (**)$$

Agora, observe que a soma do lado esquerdo da igualdade $(**)$ é uma soma teloscópica e seu valor é igual a

$$\frac{a_n}{n!} - \frac{a_1}{1!} = \frac{a_n}{n!}$$

.

Portanto, a igualdade $(**)$ pode ser reescrita como

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{r=2}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!},$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}.$$