OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL N$^{\underline{o}}$ 06 - Data 06/04/2015

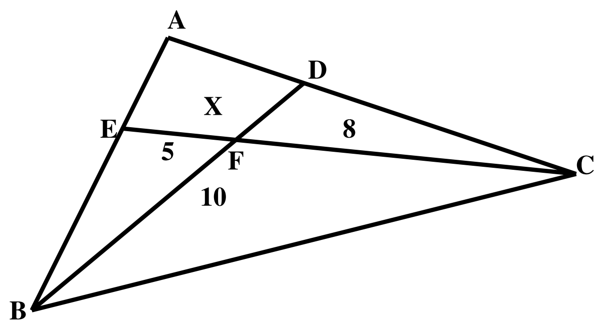
NÍVEL I

Num prédio existem n apartamentos, numerados de 1 a n, e em todos os andares existe o mesmo número de apartamentos, exceto o térreo, onde não há apartamentos. Meu amigo Juan mora no 6$^{\underline{o}}$ andar, no apartamento 28.
Quantos apartamentos existem em cada andar no prédio?
SOLUÇÃO

São 5 apartamentos por andar.
Se o prédio tivesse 4 ou menos apartamentos por andar, o 6$^{\underline{o}}$ andar terminaria no máximo no apartamento de número 24.
Se o prédio tivesse 6 ou mais apartamentos por andar, o 6$^{\underline{o}}$ andar começaria no mínimo com o apartamento de número 30.
Portanto, são 5 apartamentos por andar, o que faz com que os apartamentos do 6$^{\underline{o}}$ andar sejam os de números: $26, 27, 28, 29$ e 30.

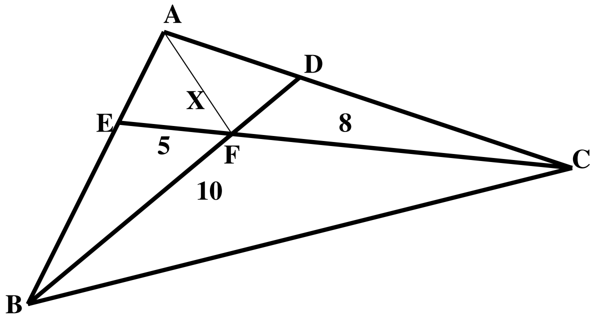
NÍVEL II

Divide-se a área limitada por um triângulo ABC em quatro regiões triangulares, cujas áreas são dadas na Figura a seguir.



Determine o valor de **X**.
SOLUÇÃO

Liguemos o ponto A ao ponto F, veja Figura a seguir.



Sejam:
$a = S(\Delta AEF)$ = área do triângulo determinado pelos vértices A, E, F;
$b = S(\Delta BEF)$ = área do triângulo determinado pelos vértices B, E, F.
Assim, temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{S(\Delta AEF)}{S(\Delta BEF)} = \frac{a}{5} \quad (*) \qquad e \qquad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{S(\Delta AEC)}{S(\Delta BEC)} = \frac{a+b+8}{15} \quad (**)$$

Igualando (*) = (**), temos

$$\frac{a}{5} = \frac{a+b+8}{15} \Leftrightarrow 2a - b = 8 \qquad (I)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{S(\Delta AFD)}{S(\Delta DFC)} = \frac{b}{8} \quad (*) \qquad e \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{S(\Delta ABD)}{S(\Delta BDC)} = \frac{a+b+5}{15} \quad (****)$$

Igualando (***) = (****), temos

$$\frac{b}{8} = \frac{a+b+5}{18} \Leftrightarrow 4a - 5b = -20 \qquad (II)$$

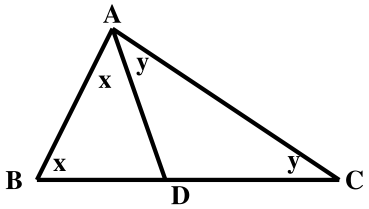
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), temos: $a = 10$ e $b = 12$, o que implica $X = a + b = 10 + 12 = 22$.

<u>NÍVEL III</u>

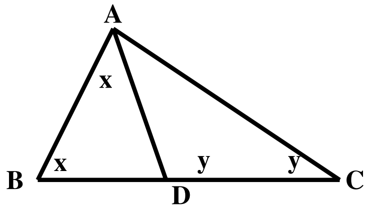
Quais são os triângulos ABC que ficam divididos em dois triângulos isósceles quando se traça um segmento de reta?

SOLUÇÃO

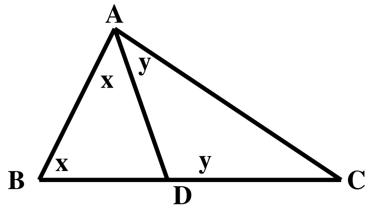
Suponha que o triângulo ABC seja cortado por um segmento de reta cujos extremos sejam os pontos A e D, onde D é um ponto do lado BC. Com isso, dividimos o triângulo ABC em dois triângulos: ABD e ADC. Estes triângulos serão isósceles se, respectivamente, possuem dois ângulos de medidas iguais. Vamos chamar de x e de y as medidas dos ângulos de mesmo comprimentos nos repectivos triângulos.
É fácil ver que existem 9 maneiras possíveis nas quais os triângulos ABD e ADC poderiam ser isósceles, veja as figuras a seguir:



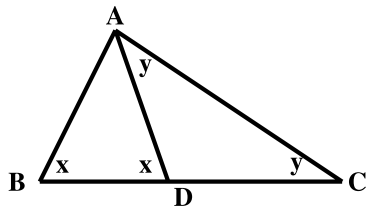
(1)



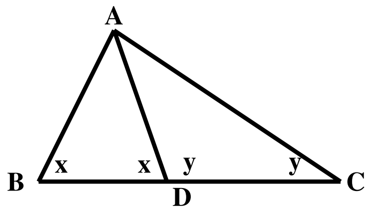
(2)



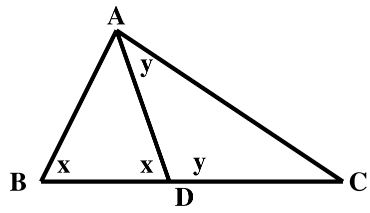
(3)



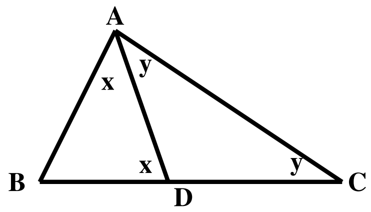
(4)



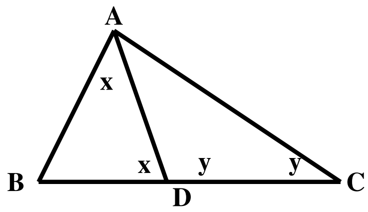
(5)



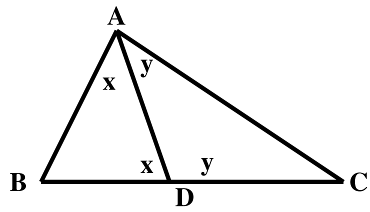
(6)



(7)



(8)



(9)

Vamos analisar as diferentes possibilidades.

- Para as possibilidades $(5),(6),(8)$ e (9), como x,y são números menores do que 90^o, temos que $x+y<90^o$.
- Na possibilidade (1), temos $2x+2y=180^o \Leftrightarrow x+y=90^o$. Portanto, a medida do ângulo A é igual a 90^o.
- Na possibilidade (2), usando a Lei Angular de Thales e que a soma de ângulos suplementares é igual a 180^o, é fácil concluir que $y=2x$, o que implica que a medida do ângulo C é igual a duas vezes a medida do ângulo B: $m(\hat{C})=2\times m(\hat{B})$.
- Na possibilidade (3), é fácil ver que $y=2x$, o que implica $m(\hat{A})=3\times m(\hat{B})$.
- Na possibilidade (4), é fácil ver, como na possibiidade (2), que $m(\hat{B})=2\times m(\hat{C})$ e $\hat{B}$ é um ângulo agudo.
- Na possibilidade (7), é fácil ver, como na possibiidade (3), que $m(\hat{A})=3\times m(\hat{C})$

Agora, dessas condições, vamos verificar quais são as que são suficientes:

1. Se $m(\hat{A})=90^o$, segue que ΔABD e ΔADC são ambos triângulos isósceles.
2. ΔADC é isósceles e ΔDAB é isósceles.
3. $m((\hat{A})=3\times m(\hat{B})$ implica que ΔDAB é isósceles e ΔCAD é isósceles.
4. Mesmo que em 2.
5. O mesmo que em 3.

Conclusão:
Os triângulos ABC que ficam divididom em dois triângulos isósceles quando se traça um segmento de reta são:

- Triângulos retângulos;
- Triângulos com um ângulo medindo o dobro de outro, com o maior ângulo agudo;
- Triângulo com um ângulo medindo três vezes o outro.

<u>NÍVEL UNIVERSITÁRIO</u>

Diga, justificando, se existe uma matriz quadrada A tal que $trA = 0$ e $A^2 + A^t = I$.

SOLUÇÃO

Não existe tal matriz.

Suponha que existe uma matriz quadrada satisfazendo as hipóteses do problema. Assim, temos:

$$A^2 + A^t = I \Longrightarrow A^t = I - A^2 \Longrightarrow AA^t = A - A^3$$

Do mesmo modo,

$$A^2 + A^t = I \Longrightarrow A^t = I - A^2 \Longrightarrow A^t.A = A - A^3.$$

Logo, $A.A^t = A^t.A$.

Isto significa que A é uma matriz normal. Pela decomposição de Schur, existe uma matriz unitária U e uma matriz diagonal D tal que $A = UDU^*$. Portanto,

$$I = A^2 - A^t = A^2 - A^* = UD^2U^* - UD^*U^* = UD^2U^* - UDU^*.$$

Isto implica que $D^2 - D = I$. Como D é uma matriz diagonal, e se $d_1, d_2, \cdots, d_n$ são as entradas na diagonal de D, temos que:

$$d_i^2 - d_i = 1, \ para \ todo \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Portanto, $d_i \in \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$. Estes números **não** podem satisfazer a igualdade

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0.$$

Portanto, não existe tal matriz.