Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 04 - Data 13/04/2015

NÍVEL I

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. Na mesa há três montes de palitos de fósforos. Um contém 10 palitos, um segundo 14 e o terceira, 25 palitos. Na sua vez de jogar, cada jogador escolhe um dos montes em cima da mesa e o divide em dois montes menores, independentemente da quantidade de palitos que está em cada um deles. Perde o jogador que não pode mais fazer a divisão de qualquer monte de palitos de fósforos. O jogador A começa.
Quem vence: A ou B? Qual a estratégia vencedora?

SOLUÇÃO

O jogador B vence o jogo.
Observe que, independentemente de como se desenvolveu a partida, a posição final do jogo será de 49 montes distintos, cada um deles contendo exatamente 1 palito de fósforo. É fácil ver que, se no final não tivesse os 49 montes descritos, então algum monte teria no mínimo 2 palitos e o jogo não terminaria aí. O jogador que fizer a jogada seguinte teria a chance de vencer.
É importante observar que, ao final de cada jogada o número de montes de palitos de fósforo aumentou em um, pois, pelas regras do jogo, cada jogador tem de escolher um monte e dividi-lo em 2 montes mais. Isto é, após cada jogada se "perde" um monte de palitos e se cria dois. Ou seja, o número total de montes naturalmente aumenta em um.
Portanto, imediatamente depois que o jogador A faz cada um de seus movimentos, o que tem sobre a mesa é um **número par** de montes. Inicialmente tem três montes, depois de seu primeiro movimento, restam quatro, e assim por diante. Logo depois de cada movimento do jogador B vai existir sempre um número ímpar de montes de palitos de fósforos. No final, após o movimento do vencedor, vão existir 49 montes de palitos de fósforos, e este é um número ímpar, então vence o jogo o segundo jogador, independente de como se desenvolve o jogo.

NÍVEL II

Um dispositivo eletrônico com dois botões, um vermelho (V) e um amarelo (A), exibe na tela um número inteiro. Pressionando a tecla vermelha, o número n no visor é substituído por $2n-7$ e pressionada a tecla amarela o número n no visor é substituído pelo número $3n-14$. Começando com $n = 77$, pressionando sequencialmente as teclas várias vezes aparece na tela um número K maior do que 777777.
Encontre o menor de tais possíveis números K.

SOLUÇÃO

Seja $a_0, a_1, a_2, \cdots$ a sequencia de números que aparece na tela do dispositivo eletrônico, onde:

$$a_0 = 77; \qquad a_{i+1} = 2a_i - 7 \qquad ou \qquad a_{i+1} = 3a_i - 14,$$

dependendo se na posição do i-ésimo aperto se usou o botão vermelho ou amarelo, respectivamente.
Agora, é fácil ver que:

$$a_0 = 77 = 70 + 7, \qquad a_{i+1} = 2a_i - 7 = 2(a_i - 7) + 7 \qquad ou \qquad a_{i+1} = 3a_i - 14 = 3(a_i - 7) + 7,$$

que é o mesmo que escrever:

$$a_0 - 7 = 70, \qquad a_{i+1} - 7 = 2(a_i - 7) \qquad ou \qquad a_{i+1} - 7 = 3(a_i - 7).$$

Assim, podemos definir a sequência de números inteiros $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots$ como sendo

$$b_0 = 70; \qquad b_i = a_i - 7, \quad com \qquad b_{i+1} = 2b_i \qquad ou \qquad b_{i+1} = 3b_i.$$

O que queremos é: $70 \times 2^a \times 3^b > 777770$. Ou seja, $2^a \times 3^b > 11111$.
É fácil ver que $b \leq 9$, pois $3^{10} = 59049 > 11111$.
Observe na tabela a seguir os menores valores para os possíveis valores de b, para se ter $2^a \times 3^b > 11111$.

a	b	$2^a \times 3^b$
0	9	19683
1	8	13122
3	7	17496
4	6	11664
6	5	15552
8	4	20736
9	3	13824
12	1	12288
14	0	16384

O mínimo será alcançado em $M = 70 \times 2^4 \times 3^6 + 7 = 816487$, obtido apertando as teclas $AAAAAAVVVV$ em qualquer ordem.

NÍVEL III

Em um jogo, Boris tem 1000 cartas numeradas $2, 4, \cdots, 2000$, enquanto Anna tem 1001 cartas numerados $1, 3, \cdots, 2001$. O jogo dura 1000 rodadas. Em rodadas ímpares, Boris joga qualquer carta dele. Anna ver o carta dele e joga uma carta dela. O jogador cujo carta possui o maior número ganha a rodada, e ambos as cartas são descartadas. Nas jogadas pares o jogo se processa da mesma maneira, exceto que Anna joga em primeiro lugar. No final do jogo, Anna descarta a carta dela não utilizada.
Qual é o número máximo de rodadas, que cada jogador pode garantir vencer, independentemente de como o adversário joga?

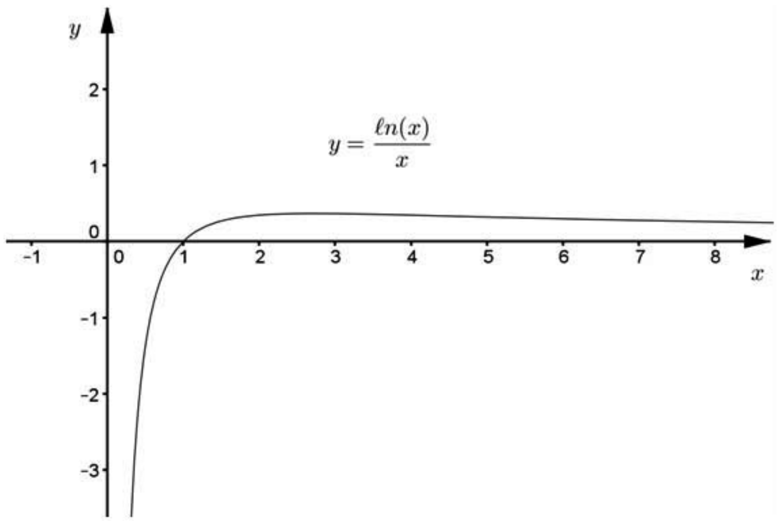
SOLUÇÃO

Antes de resolver o problema, vamos simular uma partida disputada com 5 cartas, com Boris tendo as cartas numeradas com 2 e 4 e Anna tendo as cartas numeradas com $1, 3$ e 5. Se Boris joga a carta 2, Anna vence as duas rodadas jogando inicialmente a carta 3 e depois a carta 5. Se Boris joga a carta 4, Anna vence as duas rodadas jogando inicialmente a carta 5 e depois a carta 3.
Vamos provar por indução sobre n que, se existem $4n + 1$ cartas, então Boris pode garantir vencer $n - 1$ rodadas, enquanto Anna pode garantir vencer $n + 1$ rodadas.
A melhor estratégia para Boris é jogar a carta 2 na primeira rodada, que é a sua carta de menor número. Se Anna vai ganhar este rodada, ela realmente deve jogar a carta numerada com 3. Além disso, não há nenhuma razão por que ela deveria perder esta rodada jogando a carta numerada com 1, porque as cartas marcadas com 1 e 3 são equivalentes, depois que a carta 2 foi descartada.
Portanto, podemos presumir que a Anna ganha a primeira rodada com a carta 3.
Se na segunda rodada Anna não joga a carta $4n + 1$, Boris pode ganhar por jogar a carta mais baixa acima da de Anna. Neste ponto, embora haja agora algumas lacunas entre as $4n - 3$ cartas restantess ainda em jogo, as explorações de Boris e Anna estão no padrão alternado. Portanto, nós pode jogar o equilíbrio do

jogo como se os números das cartas foram ajustados para funcionar de 1 a $4n-3$ e chegar à conclusão desejada por indução.
Suponha que Anna joga a carta $4n+1$ na segunda rodada. Claramente, Boris deve jogar a carta de númeror 4, mas ele pode ganhar a próxima rodada com a maior carta que ele dispõe, que é a de número $4n$, forçando a Anna, que sabe que vai perder, a jogar a carte de número 1 ou a carta de número 5 (agora equivalente) e restaurar o padrão alternado.
Se em qualquer rodada subseqüente, Anna não joga a carta mais alta que possui, Boris pode ganhar a rodada e ao mesmo tempo restaurar o padrão alternado.
Se Anna continua a jogar a carta mais alta, Boris pode fazer o mesmo. Ele então vai perder a primeira e a última rodada e ganha de duas em duas rodadas, vencendo um total de $n-1$ rodadas.
A estratégia mais simples de Anna é ganhar a primeira rodada, jogando a carta mais baixa acima de Boris e jogando a carta de número 1 na segunda rodada.
A conclusão desejada segue então pela hipóteses de indução.

<u>NÍVEL UNIVERSITÁRIO</u>
Sem usar calculadora ou computador, diga, justificando, qual é o maior: e^{π} ou π^{e}?
SOLUÇÃO

A resposta é: e^{π}.
Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Então $f'(x) = \frac{1-\ln x)}{x^2}$ e $f'(x) = 0$ se $\ln x = 1$ *ou* $x = e$.
Como $f'(x)$ muda de sinal $+$ para $-$ quando x passa por e, então f possui um máximo relativo em $x = e$. Além disso, $x = e$ é um máximo absoluto, pois $f(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$ e $f(x) \longrightarrow -\infty$ quando $x \longrightarrow 0$, veja, a seguir, o gráfico da função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.



Portanto, temos:

$$f(\pi) < f(e) \Longleftrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Longleftrightarrow e \ln \pi < \pi \ln e \Longleftrightarrow \ln \pi^{e} < \ln e^{pi},$$

o que implica $\pi^{e} < e^{\pi}$.