OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

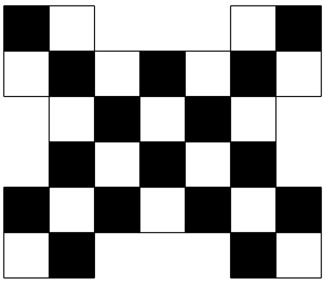
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 04 - Data 20/04/2015

NÍVEL I

Quantos são os quadrados que aparecem na figura seguinte, formada a partir de quadrados unitários?



SOLUÇÃO)

Inicialmente, para evitar confusão, observe que um quadrado é um quadrilátero (polígono com 4 lados), que tem os lados opostos paralelos (ou seja, é um paralelogramo), com todos os lados de mesma medida e cada um dos ângulos internos mede 90^o. Agora, é só procurar na Figura dada os quadrados de dimensão: $1\times 1,\ 2\times 2,\ 3\times 3,\ e\ 4\times 4.$
É fácil ver que existem:

- 32 quadrados 1×1;
- 16 quadrados 2×2;
- 6 quadrados 3×3;
- 2 quadrados 2×2.

Portanto, o número total de quadrados na figura dada é: $32+16+6+2=56$.

NÍVEL II

Duas pessoas, A e B, disputam o seguinte jogo. O jogador A escolhe dois números inteiros positivos a e b. Em seguida, conhecendo, a e b, o jogador B pinta todos os números inteiros positivos com duas cores. Se depois disto é possível escolher pelo menos dois números inteiros positivos de mesma cor, x e y, tais que $x-y$ seja igual a a ou a b, vence o jogador A. Se não, vence o jogador B.

Determinar qual jogador vence o jogo com as seguintes escolhas de a e b:
(a) 7 e 11 (b) 13 e 20 (c) 8 e 12 (d) 24 e 40.
SOLUÇÃO

Incialmente, vamos fazer algumas observações sobre os procedimentos da pintura dos números. Suponha que as duas cores usadas pelo jogador B sejam vermelha (V) e cinza (C).
A idéia para que o jogador A vença vai ser a de escolher dois números a e b de tal modo que o jogador B vai tentar em vão pintar todos os números inteiros, sem nunca conseguir dois números de mesma cor cuja diferença seja a ou b.
Observe que, se o número 1 tiver a cor vermelha (V) e o jogador B quiser vencer, então deve pintar os números $1+a$ e $1+b$ de cinza (C), pois, caso contrário, o jogador A vence, pois, por exemplo, $(1+a)-1=a$.
Da mesma forma, $1+2a$ e $1+2b$ devem ser pintados de vermelho, pois $(1+2a)-(1+a)=a$ (o mesmo vale para b, pois $(1+2b)-(1+b)=b$).
Assim, vamos completando a lista dos números $(1+ \ \textit{múltiplo de } a)$ e $(1+ \ \textit{múltiplo de } b)$, pintados de cores alternadas.
A idéia será verificar se existe um número que está em uma lista, com uma cor, e está em outra lista, pintado com a outra cor. Isto não pode acontecer.
Qual é o primeiro número que aparece em ambas as listas?
Se $c=MMC(a,b)$, então este número deve ser $1+c$.
Agora vamos responder as perguntas.
(a) Temos que $MMC(7,11)=77$. O número $1+77=78$ terá mesma cor nas duas listas se houver um número ímpar de passos na lista dos multiplos de 7 e 11 para atingir 77.
Neste caso, para o jogador B vencer, basta pintar todos os pares de vermelho e todos os ímpares de cinza, de modo que a diferença (ou soma) de dois número de mesma cor será par. Portanto, nunca igual a 7 ou a 11.
(b) Temos que $MMC(13,20)=260$. Neste caso, 260 é atingido como múltiplo de 13 em um número par de passos, e como múltiplo de 20 em um número ímpar de passos. Isto significa que o número $1+260=261$ aparece numa lista com uma cor e na outra lista com a cor opasta. Neste caso, o jogador a sempre vence, não importa como o jogador pinte os inteiros.
(c) Temos que $MMC(8,12)=24$. Neste caso, 24 é atingido como múltiplo de 8 em um número impar de passos, e como múltiplo de 12 em um número ímpar de passos. Isto significa que o número $1+24=25$ aparece numa lista com uma cor e na outra lista com a cor opasta. Neste caso, o jogador A sempre vence, não importa como o jogador B pinte os inteiros.
(d) Temos que $MMC(24,40)=120$. Neste caso, em ambas as listas o número $1+120$ teria a mesma cor. Uma forma de pintura para que o jogador B vença seria pintar os inteiros, no sentido crescente, em intervalos de 8. Ou seja, pintaria de vermelho os números de 1 a 8, de 17 a 24, de 33 a 40 etc., e os restantes pintaria de cinza. É fácil ver que a soma ou diferença de dois desses números de mesma cor daria 24 ou 40.

<u>NÍVEL III</u>
Colocamos um peão em cada casa de um tabuleiro de xadrez (8×8). A seguir, retiramos todos os peões do tabuleiro e os colocamos novamente, mas de tal forma que os peões que ficaram nas casas situadas nos cantos esquerdos do tabuleiro retornem às suas posições originais e peões que eram vizinhos (i. e. que ocuparam casas adjacentes) sejam novamente vizinhos.
É possível que algum peão esteja agora ocupando uma posição diferente da sua posição anterior?
SOLUÇÃO

A resposta é não.
Sejam (i,j) a casa do tabuleiro que esteja na i-ésima linha e j-ésima coluna e $F(i,j)$ a casa agora ocupada pelo peão que originalmente ocupava a casa (i,j).
Pelas hipóteses, temos que $F(1,1)=(1,1)$ e $F(8,1)=(8,1)$, pois essas são as duas casas nos cantos esquerdos do tabuleiro. Também, por hipótese, $F(i,j)$ preserva casas adjacentes.
Vamos provar que $F(i,j)=(i,j)$, para $i=1,2,3,\cdots,8$ e $j=1,2,3,\cdots,8$.
É fácil ver que, a quantidade de casas que são vizinhas de uma determinada casa é menor para uma casa que ocupa um dos cantos do tabuleiro do que para as outras casas do bordo do tabuleiro. E a quantidade de

casas que são vizinhas de uma casas no bordo do tabuleiro é menor do que a quantidade de casas vizinhas de uma localizada no interior do tabuleiro.
Como na nova posição nenhum peão pode ter uma quantidade menor de vizinhos do que tinha antes, segue que, se a casa (i,j) está no interior do tabuleiro, então $F(i,j)$ está também no interior. Se uma casa (i,j) está num canto do tabuleiro, então $F(i,j)$ está também num canto do tabuleiro. Podemos também concluir que se a casa (i,j) não está num canto nem no bordo do tabuleiro, então $F(i,j)$ não está num canto nem no bordo do tabuleiro.
Portanto, as casas $(1,1),\cdots,(2,1),\cdots,(8,1)$ é uma sequência de vizinhos sucessivos no bordo do tabuleiro, então $F(1,1),\cdots,F(2,1),\cdots,F(8,1)$ tem de ter a mesma propriedade. Como $F(1,1)=(1,1)$ e a casa $(1,1)$ possui somente duas casas vizinhas: $(1,2)$ *e* $(2,1)$, segue que a casa $F(2,1)$ pode ser igual somente a uma dessas duas casas. Vamos considerar estes dois casos:

- Se $F(2,1)=(1,2)$. Neste caso, como a casa $(3,1)$, adjacente à casa $(2,1)$, está no bordo do tabuleiro, então $F(3,1)$ tem de está no bordo do tabuleiro e adjacente à casa $(F(2,1)=(1,2)$. Logo, $F(3,1)=(1,3)$. De modo análogo, $F(4,1)=(1,4),\cdots,F(8,1)=(1,8)$, que é uma contradição, pois $F(8,1)=(8,1)$. Portanto, esta hipótese não pode acontecer.

- Se $F(2,1)=(2,1)$. Neste caso, usando a mesma idéia do item anterior, concluímos que $F(3,1)=(3,1), F(4,1)=(4,1),\cdots,F(8,1)=(8,1)$, o que mostra que os peões da primeira linha do tabuleiro são mantidos nas posições iniciais.
  Agora, como a casa $(1,2)$ está no bordo do tabuleiro e é adjacente à casa $(1,1)$, então $F(1,2)$ está no bordo do tabuleiro e é adjacente às casas $(1,1)=F(1,1)$ *e* $(2,1)$ e diferente de $(2,1)$. Logo, $F(1,2)=(1,2)$. Do mesmo modo, a casa $F(2,2)$ é adjacente às casaa $F(2,1)$ *e* $F(1,2)$, o que implica $F(2,1)=(2,1)$. Desse modo, concluímos que $F(2,2)=(2,2), F(2,3)=(2,3),\cdots,F(2,8)=(2,8)$. Desta maneira, conclui-se que $F(i,j)=(i,j)$ para as próximas colunas, o que conclui a prova.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Calcule a integral

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}dx$$

SOLUÇÃO

Seja $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}dx.$

Como o domínio de integração é simétrico em relação à origem, podemos escrever $f(x)=f_p(x)+f_i(x)$, onde

$$f_p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad e \qquad f_i(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Observe que $f_p(x)$ é uma função par e $f_i(x)$ é uma função ímpar. Além disso,

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}dx=\int_{-1}^{+1}f(x)dx=\int_{-1}^{+1}f_p(x)dx+\int_{-1}^{+1}f_i(x)dx=\int_{-1}^{+1}f_p(x)dx,$$

pois a integral de uma função ímpar num domínio de integração simétrico em relação à origem é nula.
Por outro lado, a integral da função par no intervalo simétrico em relação a origem é igual a:

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}dx=\int_{-1}^{+1}f(x)dx=\int_{-1}^{+1}f_p(x)dx=2\int_{0}^{+1}f_p(x)dx$$

. Assim, como $f_p(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, temos:

$$I=2\int_{0}^{+1}f_p(x)dx$$

$= 2\int_0^{+1}[\frac{f(x)+f(-x)}{2}]dx \Longleftrightarrow$

$$I = \int_0^{+1}[f(x)+f(-x)]dx = \int_0^{+1}[\frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1} + \frac{\cos(-x)}{e^{\frac{1}{-x}}+1}]dx \Longleftrightarrow$$

$$I = \int_0^{+1}(\cos x)\Big(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} + \frac{1}{e^{\frac{1}{-x}}+1}\Big)dx \Longleftrightarrow$$

$$I = \int_0^{+1}(\cos x)\Big(\frac{(e^{\frac{1}{-x}}+1)(e^{\frac{1}{x}}+1)}{(e^{\frac{1}{x}}+1)(e^{\frac{1}{-x}}+1)}\Big)dx \Longleftrightarrow$$

$$I = \int_0^{+1}(\cos x)dx = \ sen\ x|_0^1 = sen\ 1.$$