OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

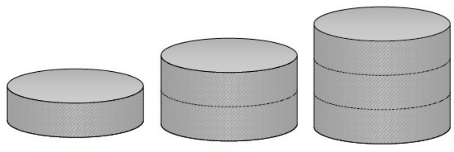
Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 09 - Data 27/04/2015

NÍVEL I

Isabel e Maria disputam um jogo para o qual utilizam três pilhas de moedas iguais.



Na primeira pilha existe uma única moeda; na segunda pilha existem duas moedas; na terceira pilha existem três moedas. As regras do jogo são as seguintes:

1. Na sua vez de jogar, cada jogadora pode retirar ou uma única moeda ou todas as moedas de qualquer uma das pilhas;
2. A jogadora que retira a última moeda perde o jogo;
3. Isabel inicia o jogo.

De que pilha Isabel tem que retirar suas moedas se quer ganhar a partida?

SOLUÇÃO

Se Isabel quer ganhar a partida, tem de começar retirando **uma** moeda da pilha 2. Abaixo, mostramos em tabelas como o jogo se desenvolve depois do primeiro movimento de Isabel.

INICIO	Isabel retira da pilha 1	Isabel retira uma moeda da pilha 3
Isabel joga	_ ●● ●●●	● ●● ●●_
Maria joga	_ ●● ●●	_ ●● ●●
Isabel joga	_ ● ●●	_ ●●___
Maria joga	_ ● ___	_ ●___
Isabel joga	_ _ _ _ _ _	_ _ _ _ _ _
RESULTADO	Isabel perde	Isabel perde

INICIO	Isabel retira todas da pilha 3	Isabel retira todas moeda da pilha 2
Isabel joga	● ●● ___	● __ ●●●
Maria joga	● __ ___	● __ ___
Isabel joga	_ _ _ _ _ _	_ _ _ _ _ _
RESULTADO	Isabel perde	Isabel perde

INICIO	Isabel retira 1 moeda da pilha 2		
Isabel joga	• • •••	• • •••	• • •••
Maria joga	_ • •••	• •• ••	• • ___
Isabel joga	_ • ___	• • •	_ • ___
Maria joga	_ __ ___	_ • •	_ __ ___
Isabel joga	_ __ ___	_ • ___	_ __ ___
Maria joga	_ __ ___	_ __ ___	_ __ ___
RESULTADO	Isabel ganha	Isabel ganha	Isabel ganha

NÍVEL II

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Para o jogo, tem uma pilha com 2003 pedras. Em seu primeiro movimento, o jogador A escolhe um divisor de 2003 e remove esse número de pedras da pilha inicial. Posteriormente, B escolher um divisor do número de pedras restantes e remove esse número de pedras da nova pilha, e o jogo continua assim. Perde o jogador que retirar a última pedra.
Quem vence: o jogador A ou o jogador B? Qual a estratégia vencedora?

SOLUÇÃO

Vence o jogador B.
Como 2003 é um número primo, seus únicos divisores positivos são 2003 e 1. O jogador A deve remover 1 pedra da pilha inicial que contém 2003 pedras, caso contrário ele perde, pois retiraria as últimas pedras.
Depois do movimento do jogador A, considere então as 2002 pedras restantes.
O jogador B remove 1 das 2002 pedras.
A estratégia a ser seguida por B é deixar sempre um número ímpar de pedras, que sempre consegue, porque: 1 é divisor de todo número inteiro e, com isso, ele deixa sempre um número ímpar de pedra para o jogador A. Aí, como todos os divisores de um número ímpar são ímpares e a diferença de dois números ímpares é um número par, o jogador B, antes de qualquer um de seus movimentos, tem sempre um número par de pedras. Chegará um momento em que vai haver somente duas pedras para B fazer seu movimento. Ele então retira uma das pedras, deixando a outra para o jogador A, o que implica que A perde o jogo.

NÍVEL III

Diga, justificando, se é possível ladrilhar um salão em forma de um tabuleiro, medindo 2015×2015, usando somente ladrilhos de dimensão 1×2, colocados horizontalmente, e ladrilhos 1×3, colocados verticalmente.

SOLUÇÃO

Não é possível.
Pinte as colunas do tabuleiro 2015×2015 alternadamente de preto e branco, começando com a primeira coluna à esquerda pintada de preto. Assim, cada ladrilho de dimensçao 1×2, colocado horizontalmente, cobre duas casas: uma branca e uma preta, enquanto cada ladrilho de dimensão 1×3, colocado verticalmente, cobre três casas de mesma cor.
Suponha que seja possível ladrilhar o salão com as hipóteses do problema.
Seja n a quantidade de casas pretas cobertas por ladrilhos de dimensão 1×2.
Como existem 1008 colunas pintadas de preto, segue que a quantidade de casas pretas cobertas pelos ladrilhos de dimensões 1×3 é igual a $\dfrac{(2015 \times 1008) - n}{3}$.
De modo análogo, como existem 1007 colunas pintadas de branco, segue que a quantidade de casas brancas cobertas por ladrilhos de dimensão 1×3 é igual a $\dfrac{(2015 \times 1007) - n}{3}$.
Como este dois números devem ser inteiros, temos que a diferença entre eles é um número inteiro. Mas, temos que a diferença

$$\left[\frac{(2015 \times 1008) - n}{3}\right] - \left[\frac{(2015 \times 1007) - n}{3}\right] = \frac{2015}{3},$$

não é um número inteiro, o que é uma contradição. Portanto, é impossível ladrilhar um salão em forma de um tabuleiro, medindo 2015×2015, usando somente ladrilhos de dimensão 1×2, colocados horizontalmente, e ladrilhos 1×3, colocados verticalmente.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

A probabilidade de que o quadrado de um número inteiro positivo termine com o dígito 1 é igual a $\frac{2}{10}$, pois dentre dez inteiros consecutivos quaisquer somente os que terminam em 1 ou 9 possuem seus quadrados terminados em 1.
Qual é a probabilidade de que o cubo de um número inteiro positivo, escolhido aleatoriamente, termine em 11?

SOLUÇÃO

Observe que, se a^3 termina com os dígitos 11, então $a^3 \equiv 11(mod\ 100)$. Isto equivale a dizer que:

- $a^3 \equiv 11(mod\ 4) \equiv 3(mod\ 4)$ e
- $a^3 \equiv 11(mod\ 25)$.

Assim, é fácil ver que 3 é a única solução de $a^3 \equiv (mod\ 4)$, pois $0^3 \equiv 0(mod\ 4)$; $1^3 \equiv 1(mod\ 4)$; $2^3 \equiv 0(mod\ 4)$; $3^3 = 3^2 \times 3 \equiv 3(mod\ 4)$.
Agora, $a^3 \equiv 11(mod\ 25) \Rightarrow a^3 \equiv 1(mod\ 5)$.
Logo, é fácil ver que 1 é a única solução de $a^3 \equiv 1(mod\ 5)$.
Segue que precisamos somente verificar os cubos de $1, 6, 11, 16\ e\ 21$ módulo 25. Assim, temos:

$$1^3 \equiv 1(mod\ 25);$$

$$6^3 = 6^2 \times 6 = 36 \times 6 \equiv 11 \times 6(mod\ 25) \equiv 16(mod\ 25)$$
$$11^3 = 1331 \equiv 16(mod\ 25)$$
$$16^3 = 16^2 \times 16 = 256 \times 16 \equiv 6 \times 16(mod\ 25) \equiv 21(mod\ 25)$$
$$21^3 \equiv (-4)^3(mod\ 25) \equiv 11(mod\ 25).$$

Portanto, $a = 21$ é a única solução módulo 25. Pelo Teorema Chinês de Restos, existe somente uma solução satisfazendo:

$$a \equiv 3(mod\ 4)$$
$$e$$
$$a \equiv 21(mod\ 25),$$

que é 71.
Portanto, a probabilidade de que um cubo aleatório termine com os dígitos 11 é igual a $\dfrac{1}{100}$.