OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL $N^{\underline{o}}$ 10 - Data 04/05/2015

NÍVEL I
O número da minha casa é um número inteiro.

1. Se o número da minha casa é um múltiplo 3, se trata então de um número compreendido entre 50 e 59.
2. Se o número de minha casa não é múltiplo de 4, se trata então de um número compreendido entre 60 e 69.
3. Se o número de minha casa não é múltiplo de 6, se trata então de um número compreendido entre 70 e 79.

Qual é o número da minha casa?
SOLUÇÃO

A resposta é 76.
Se o número da minha casa fosse um múltiplo de 3, pela condição (1) seria ou o 51 ou o 54 ou o 57. Mas, como nenhum dos números citados é múltiplo de 4, então, pela condição (2), o número da minha casa deveria estar entre 60 e 69, que não é o caso. Logo, o número da minha casa não é múltiplo de 3.
Por outro lado, o número da minha casa não pode ser múltiplo de 6, pois se fosse, seria também múltiplo de 3. Logo, o número da minha casa deve estar compreendido entre 70 e 79. Mas, os números compreendidos entre 70 e 79 são: $71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78$. Desses, retirando os múltiplos de 3 restam $70, 71, 73, 74, 76$. Agora, pela condição (2), o número da minha casa deve ser um múltiplo de 4, pois, se não fosse, deveria estar entre 60 e 69. Portanto, o número da minha casa é 76, que é o único múltiplo de 4 pertencente ao conjunto $\{70, 71, 73, 74, 76\}$.

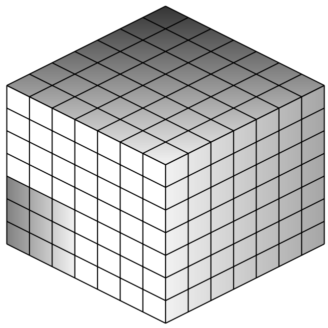
NÍVEL II
(a) Em uma caixa existem 48 doces aparentemente idênticos, mas na verdade tem 4 de cada um dos 12 diferentes sabores.
Ariel tem que retirar doces da caixa de modo que entre os que ele retirar hajam pelo menos 5 sabores distintos.
Determine a menor quantidade de doces que Ariel deve retirar para atingir seu objetivo.
(b) Ariel retirou da caixa a quantidade encontrada no subitem (a) e o irmãozinho dela comeu 4 dos doces, que eram precisamente os 4 do mesmo sabor.
Em seguida, Ariel deve devolver alguns doces para a caixa para que, com certeza, a caixa contenha pelo menos 2 doces de cada um de 8 sabores distintos.

Determine quantos doces deve Ariel devolver, no mínimo, para alcançar este novo objetivo.
SOLUÇÃO

(a) Se Ariel retira 16 doces, na pior hipótese, existe a possibilidade de que retire 4 doces de 4 sabores distintos, então ele tem de reitrar pelo menos 17 doces para atingir seu objetivo.

(b) Se Ariel retira 28 doces, existe a possibilidade de que retirer os 4 de 7 sabores diferentes. Então você tem que remover mais de 28. Agora, como precisa 2 de outro sabor e como restam lá 4 sabores, (porque o irmãozinho comeu os 4 do mesmo sabor), se retira 4 doces, podem ser que sejam os 4 de sabores diferentes, então ele tem de retirar 5 além dos 28 que já havia retirado, num total de 33. Portanto, como ficaram 31 doces na caixa, Ariel deve retornar apenas 2 doces para atingir seu novo objetivo.

<u>NÍVEL III</u>
Divide-se cada face de um cubo $7 \times 7 \times 7$ em quadrados de unitários.

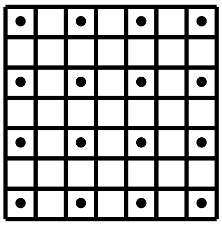


Qual é o número máximo de quadrados unitários que podem ser escolhidos de modo que nenhum deles tenha um ponto em comum?
SOLUÇÃO

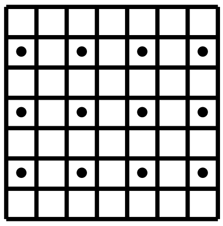
A resposta é 74.
Subdivida cada quadrado unitário de cada face em 4 quadradinhos $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.
Agora, associe a cada quadrado unitário aos quadradinhos nos quais ele tenha no mínimo um ponto em comum.
Assim, um quadrado unitário num canto de uma face do cubo ficará associado a $1 \times 4 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 15$ quadradinhos. Qualquer outro quadrado unitário ficará associado a $1 \times 4 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 16$ quadradinhos.
Quaisquer dois quadrados unitários escolhidos terão de ter associados conjuntos de quadradinhos disjuntos.
Como em cada uma das 6 faces existem 7^2 quadrados unitários e cada quadrado unitário foi subdividido em 4 quadradinhos, segue que no total existem $4 \times 6 \times 7^2 = 1176$ quadradinhos.
Chamemos de x a quantidade de quadrados unitários dos cantos e de y a quantidade dos outros quadrados unitários escolhidos. Assim, queremos maximizar $(x+y)$, com x, y satisfazendo a condição $15x + 16y \leq 1176$.
Observe que, em cada canto do cubo existem três quadrados unitários e se um quadrado unitário de um canto for escolhido, nenhum dos outros dois quadrados do mesmo canto podem ser escolhidos. Logo, temos que ter $x \leq 8$. Como $1176 = 8 \times 15 + 66 \times 16$, segue que:

$$max\{(x+y)|15x + 16y \leq 1176\} = 8 + 66 = 74.$$

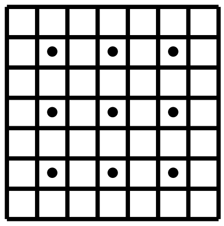
É fácil verificar que podemos encontrar uma situação na qual nossa escolha maximiza o valor de $(x+y)$.
Basta escolher pares de faces opostas nos modelos F_1, F_2, F_3, desenhados a seguir.



F_1



F_2



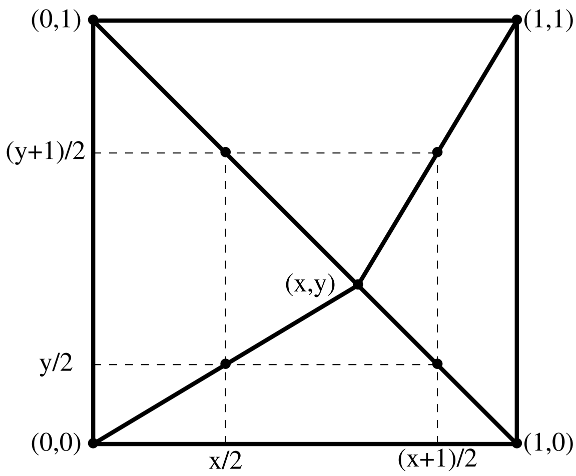
F_3

<u>NÍVEL UNIVERSITÁRIO</u>

Uma mosca e uma aranha estão no teto da sala, sobre um quadrado com 1 *metro* de lado. Num segundo, a aranha pode saltar da sua posição para o meio de qualquer um dos quatro segmentos que ligam sua posição aos vértice do quadrado no teto. A mosca não se move.
Provar que, em oito segundos, a aranha pode estar a 1 centímetro da mosca.

SOLUÇÃO

Considere no teto um sistema de coordenadas retangulares, com a origem em um dos vértices do quadrado e o eixo X ao longo do lado correspondente, veja Figura a seguir.



Sejam (x,y) as coordenadas da posição inical da aranha.
Considere a coleção de pontos

$$C_k = \left\{ \left(\frac{x+i}{2^k}, \frac{y+j}{2^k} \right),\ com\ i,j\ inteiros,\ 0 \le i,j < 2^k \right\}$$

Estes conjuntos nos dão uma subdivisão do quadrado em quadradinhos cujos lados tem comprimento igual a 2^{-k}. É fácil ver que C_0 consiste somente do ponto (x,y). Na Figura acima, mostramos os quatro pontos que constituem o conjunto

$$C_1 = \left\{ \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right), \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2} \right), \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right), \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \right\}$$

.
Agora, observe que, pelas hipóteses do problema, pulando do ponto (x,y) a aranha vai atingir um pontos no qual tem como ccordenada x ou $\frac{x}{2}$ ou $\frac{(x+1)}{2}$ e, independentemente como muda x, a segunda coordenada y só pode ser ou $\frac{y}{2}$ ou $\frac{(y+1)}{2}$.
Mostraremos a seguir que, a aranha pode atingir qualquer ponto do conjunto C_k depois de k pulos. A prova é feita por indução.
Para $k = 0$ é claro.

Suponha que a aranha pode atingir um ponto qualquer de P_k depois de k pulos. Considere um ponto arbitrário de P_{k+1}:

$$A = \left(\frac{x+i}{2^{k+1}}, \frac{y+j}{2^{k+1}}\right).$$

Temos que encontrar um ponto $B = (x_1, y_1)$ de P_k de onde a aranha pode pular para atingir o ponto A.
Tomamos

$$x_1 = \frac{x+i}{2^k},\ se\ i < 2^k, \qquad e \qquad x_1 = \frac{x+i}{2^k} - 1,\ se\ i \geq 2^k,$$

e, de modo análogo, temos

$$y_1 = \frac{y+j}{2^k},\ se\ j < 2^k, \qquad e \qquad y_1 = \frac{y+j}{2^k} - 1,\ se\ j \geq 2^k.$$

O ponto B com estas coordenadas pertence a C_k, e a aranha pode pular para ele a partir do ponto A.
É fácil ver que, para qualquer ponto D sobre o teto, existe um ponto de C_k cuja distância para D não é maior do que $\sqrt{2} \times 2^{-k}$.
Como para $k = 8$, temos que $\sqrt{2} \times 2^{-8} < \frac{1}{100}$, concluímos a prova.