OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

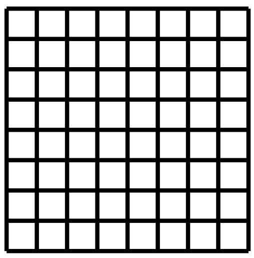
SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 11 - Data 11/05/2015

NÍVEL I

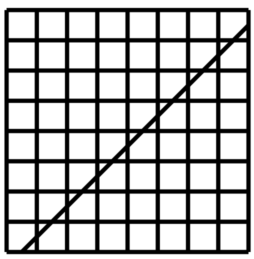
Dizemos que uma reta **trespassa** um quadrado se ela passa por um ponto da região (interior) limitada pelo quadrado. Num tabuleiro 8×8 traça-se uma reta.
Dentre as 64 casas do tabuleiro, qual é o número máximo de casas que uma reta pode trespassar?

SOLUÇÃO

Internamente, um tabuleiro 8×8 possui sete retas horizontais e sete retas verticais, que constituem os limites de cada casa, veja Figura a seguir.



Se nos movemos ao longo de uma reta arbitrária de uma casa do tabuleiro para outra, temos que passar por uma das 14 retas
Agora, como a reta traçada e as 14 retas do tabuleiro se interceptam em no máximo num ponto, existem no máximo 14 interseções. Isto significa que uma reta trepassa não mais do que 15 casas. Segue, a seguir, um exemplo de uma reta trespassando exatamente 15 casas.



NÍVEL II

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. No início, escreve-se o número

1000 no quadro-negro. Uma jogada consiste em subtrair o número que está escrito no quadro-negro de uma potênca de 2 que seja menor do que ou igual a ele. A diferença é então escrita no quadro negro e o número anterior é apagado. O jogador que atinge o número 0 vence. O jogador A começa.
Quem vence: A ou B? Qual a estratégia vencedora?
SOLUÇÃO

O jogador A, que começa, vence o jogo.
Uma boa sugestão para entender e resolver o problema é fazer a disputa para quando o número inicial for 10 em vez de 1000. Com isso fica mais fácil você perceber quais são as posições que levam à vitória.
Assim, no caso do número inicial ser 10, não há como o jogador A, no seu primeiro movimento, atingir o 0, pois 10 não é uma potência de 2. Assim, ele tem que levar seu adversário para uma posição perdedora, não importando como B jogue, ficando, consequentemente, numa posição vencedora.
Mas, quais são as posições vencedoras para A?
Vamos analisar.
É fácil perceber que 3 é uma posição vencedora, pois o jogador A deixando 3, seu adversário só fica com as seguintes alternativas de jogo:

- $3-1=2$, que o jogador A vence, pois basta diminiur $2-2=0$;
- $3-2=1$, que jogador A vence, pois basta diminuir $1-1=0$.

De modo análogo, 6 é uma posição vencedora, pois o jogador A deixando 6, seu adversário só fica com as seguintes alternativas de jogo:

- $6-1=5$, que o jogador A vence, pois basta diminiur $5-2=3$, que, como já vimos acima, é uma posição vencedora para ele;
- $6-2=4$, que jogador A vence, pois basta diminuir $4-1=3$, que, como já vimos acima, é uma posição vencedora para ele;
- $6-4=2$, que jogador A vence, pois basta diminuir $4-2=0$.

É fácil ver que 9 também é uma posição vencedora, pois o jogador A deixando 9, seu adversário só fica com as seguintes alternativas de jogo:

- $9-1=8$, que o jogador A vence, pois basta diminiur $8-2=6$, que, como já vimos acima, é uma posição vencedora para ele;
- $9-2=7$, que jogador A vence, pois basta diminuir $7-1=6$, que, como já vimos acima, é uma posição vencedora para ele;
- $9-4=5$, que jogador A vence, pois basta diminuir $5-2=3$, que, como já vimos acima, é uma posição vencedora para ele.

Com isso, é fácil ver que, as posições vencedoras são $0,3,6,9$ e as posições perdedoras são $2,4,5,7,8,10$.
Conclusão: nesse nosso exemplo, as posições vencedoras são múltiplos de 3.
Mas, o que é interessante: isso funciona de uma maneira geral, não só com o número 10.
De fato, observe que todas as potência de 2 não são múltiplos de 3, pois na sua decomposição em fatores primos só aparece 2. Além disso, na divisão por 3 as potências de 2 ou deixam resto 1 (como é o caso de $2^0=1,\ 2^2=4,\ 2^4=16,\ 2^6=64,\cdots$) ou deixam resto 2 (como é o caso de $2^1=2, 2^3=8, 2^5=32,\cdots$).
Portanto, se o jogador A deixar para seu adversário um múltiplo de 3, não importa como B jogue, acabará num número que não é múltiplo de 3. Por outro lado, se o jogador A receber um número que não é múltiplo de 3, pode deixar para o adversário um múltiplo de 3, basta dimuir 1 ou 2. A estratégia de A é deixar para o jogador B um número que não é múltiplo de 3.

NÍVEL III
Traçando dois pares de retas paralelas aos lados, divida o quadrado unitário em 9 quadrados de mesmas dimensões, veja Figura A a seguir.

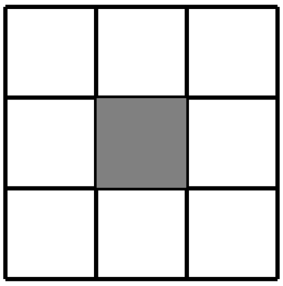


Figura A

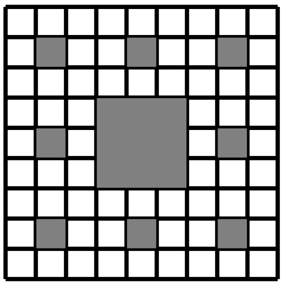


Figura B

Agora remova o quadrado central. Faça com relação aos 8 quadrados restantes o mesmo procedimento, veja Figura B acima, e prossiga fazendo isso com os quadrados restantes, repetindo o processo n vezes.

(a) Depois disso, restam quantos quadrados de lado medindo $\frac{1}{3^n}$?

(b) Qual é a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende ao infinito?

SOLUÇÃO

(a) Inicialmente, remove-se um quadrado com lado medindo $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, remove-se 8 quadrados com lado medindo $\frac{1}{9}$. Assim, após a segunda etapa resta um número de quadrados igual a

$$8 \times 9 - 8 = 8 \times (9-1) = 8^2,$$

cada um deles com lado medindo $\frac{1}{3^2}$.

Depois de três etapas, resta um número de quadrados igual a

$$8^2 \times 9 - 8^2 = 8^2 \times (9-1) = 8^3,$$

cada um deles de lado medindo $\frac{1}{3^3}$.

Portanto, após n, restam 8^n quadrados, cada um deles de lado medindo $\frac{1}{3^n}$.

(b) A soma das áreas dos quadrados que restaram é igual a

$$8^n \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados removidos é igual a

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Quando n cresce além de qualquer limite, $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ torna-se cada vez menor e tende a 0, pois $8/9$ é menor do que 1. Isto significa dizer que a área dos quadrados que são removidos tende a 1 quando n tende ao infinito.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Sejam a, b números inteiros positivos tais que $(ab+1)$ divide (a^2+b^2).

Mostre que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é o quadrado de um número inteiro.

SOLUÇÃO

Seja $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1} \qquad (*)$.

Observe que o par (a,b), com $b=0$ e $a^2=k$, satisfaz a equação $(*)$.

Suponha que, de uma maneira geral, k não seja o quadrado de um número inteiro.

Para todos os valores de k, dentre todos os pares de inteiros positivos (a,b) satisfazendo $(*)$, seja (a_1, b_1) o par onde a soma a_1+b_1 é mínima. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 \geq b_1$. Assim, temos $k=\dfrac{a_1^2+b_1^2}{a_1b_1+1}$, que é equivalente a

$$a_1^2-kb_1a_1+b_1^2-k=0$$

Ou seja, a_1 é solução da equação quadrática

$$x^2-kb_1x+b_1^2-k=0 \qquad (**)$$

A outra soluçãoda equação $(**)$, pelas fórmulas de Vieta (são fórmulas que relacionam os coeficientes de um polinômio às somas e produtos de suas raízes), é

$$a_2=kb_1-a_1=\frac{b_1^2-k}{a_1}.$$

É fácil ver que (a_2,b_1) é uma outra solução de $(*)$. Por outro lado, como $a_1a_2=b_1^2-k\neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $b_2=k$, que é contrário a nossa hipótese. Assim, temos que $a_2\neq 0$. Além disso,segue que $a_2>0$, pois se $a_2<0$, teríamos

$$a_2^2-kb_1a_2+b_1^2-k\geq a_2+k+b_1^2-k>0,$$

que é uma contradição, pois (a_2,b_1) é uma solução de $(*)$. Finalmente, observe que

$$a_2=\frac{b_1^2-k}{a_1}<\frac{b_1^2-1}{a_1}\leq\frac{a_1^2-1}{a_1}<a_1,$$

o que significa que $a_2+b_1<a_1+b_1$, que é uma contradição pela minimalidade de a_1+b_1.
Portanto, $k=\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.