OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

**Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,**

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
**http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br** - na pasta Treinamento.
**Contatos com a Coordenação da OMRN**:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
**Por favor, divulguem os problemas!**

# SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL $N^{\underline{o}}$ 12 - Data 18/05/2015

**NÍVEL I**

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em apagar um dos números inteiros do conjunto $\{1,2,3,\cdots,27\}$ até que reste somente dois números. Se a soma desses dois últimos números for divisível por 5, o jogador A vence, caso contrário, vence o jogador B.
Se cada jogador faz suas melhoes jogadas, quem vence: A ou B? Qual é a estratégia para vencer?
**SOLUÇÃO**

O jogador B vence.
Se o jogador A apaga um número $k$, então o jogador B apaga o número $27-k$. Com esta estratégia, B garante que no final teremos dois números cuja soma será igual a 27, portanto, não divisível por 5.

**NÍVEL II**

Dois jogadores disputam um jogo em que jogam alternadamente. Uma jogada consiste em escolher 9 números inteiros da sequência $1,2,3,\cdots,100,101$ e apagá-los. Depois de onze rodadas existe somente dois números. O segundo jogador paga então, em reais, ao primeiro jogador a diferença positiva entre os dois números.
Prove que o primeiro jogador ganha no mínimo 55 reais, não importa como o segundo jogador jogue.
**SOLUÇÃO**

No primeiro movimento o primeiro jogador apaga todos os 9 números de 47 a 55. Assim, os números restantes ficam divididos em dois grupos: de 1 a 46 e de 56 a 101. Agora, se o segundo jogador apaga um número $k$, o primeiro jogador apaga o número $|55-k|$. Deste modo, o valor absoluto da diferença entre os dois últimos números é igual a 55.

**NÍVEL III**

Escreve-se a seguinte equação quadrática faltando os três coeficientes:

$$\cdots x^2+\cdots x+\cdots=0$$

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. Um movimento consiste em o jogador A escolher três números distintos não nulos e o jogador B colocá-lo como coeficiente na equação dada, na ordem que ele desejar. O jogador A é considerado vencedor se a equação quadrática resultante possui raizes distintas.
Mostre que é possivel o jogador A escolher 3 números de modo que a equação final possua duas raizes

distintas, independemente de como o jogador B faça seus movimentos.
**SOLUÇÃO**

Basta o jogador A escolher três números racionais distintos e não nulos $a, b, c$, tais que a soma $a+b+c=0$. Isto equivale a dizer que $x=1$ é raiz da equação.
De fato, substituindo na equação $ax^2+bx+c=0$ o parâmtero $x$ por 1, temos que $a+b+c=0$. Logo, 1 é raiz da equação.
Assim, com a escolha do jogador A, independente da escolha do jogador B, 1 será raiz da equação e a outra raiz será $y$ tal que $1 \times y = \frac{c}{a}$, ou seja $y = \frac{c}{a}$.
Agora, observe que: como $a \neq c$, segue que $1 \neq \frac{c}{a}$, o que implica que as duas raízes são distintas e A vence.

**NÍVEL UNIVERSITÁRIO**
Escreve-se a seguinte equação cúbica faltando três dos quatro coeficientes:

$$x^3 + \cdots x^2 + \cdots x + \cdots = 0$$

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. Um movimento consiste em o jogador A escolher um número e o jogador B colocá-lo como coeficiente na equação dada, na posição vaga que ele quiser. Depois de três movimentos o jogo termina.
É possivel o jogador A escolher 3 números de modo que a equação final possua três raizes distintas, independemente de como o jogador B faça seus movimentos?
**SOLUÇÃO**

A resposta é sim.
Pelas fórmulas de Vieta, sabemos que: se $x_1, x_2, x_3$ são as três raízes de $x^3+ax^2+bx+c=0$, então:

$$\begin{array}{rcl} a & = & \text{-}(x_1+x_2+x_3) \\ b & = & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \\ c & = & \text{-}(x_1x_2x_3) \end{array}$$

O jogador A segue a seguinte estratégia.
No seu primeiro movimento, o jogador A escolhe o número 0. Neste caso, o jogador B tem três alternativas:

1. O jogador B coloca o 0 no lugar do coeficiente $c$, ficando a equação na seguinte forma:

   $$x^3+ax^2+bx=0.$$

   Agora, nos seus próximos dois movimentos o jogador A escolhe dois números distintos, por exemplo: 1 e $-1$, e a equação torna-se:

   $$x(x+1)(x-1)=0 \qquad ou \qquad x(x-1)(x+1)=0,$$

   o que garante a vitória de A.

2. O jogador B coloca o 0 no lugar do coeficiente $a$, ficando a equação na seguinte forma:

   $$x^3+bx+c=0$$

   . Neste caso, no seu próximo movimento A escolhe o número $-(3\times4\times5)^2$.
   Se o jogador coloca este número escolhido por A no lugar de $b$, então a equação fica na forma:

   $$x^3-(3\times4\times5)^2x+c=0.$$

   Agora no seu último movimento, o jogador A escolhe o número 0, o que implica que a equação final é:

   $$x^3-(3\times4\times5)^2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-(3\times4\times5)^2)=0 \Leftrightarrow x[x-(3\times4\times5)][x+(3\times4\times5)]=0,$$

   o que implica que o jogador A vence.

3. O jogador B coloca o 0 no lugar do coeficiente b, ficando a equação na seguinte forma:

$$x^3 + ax^2 + c = 0.$$

Neste caso, a seguir, o jogador A escolhe os números $-7^2$ e $-6^8 7^6$, que o jogador B pode substituir pelos coeficientes da equação produzindo duas possíveis equações:

$$x^3 - 7^2 x - 6^8 7^6 = 0 \qquad ou \qquad x^3 - 6^8 7^6 x - 49 = 0,$$

que são equivalentes a

$$(x+2\times 7)(x-3\times 7)(x-6\times 7) = 0 \qquad ou \qquad (x+2\times 6^2\times 7^2)(x+3\times 6^2\times 7^2)(x+6\times 6^2\times 7^2) = 0,$$

ambas com raízes distintas, o que implica que A vence o jogo.