OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 13 - Data 25/05/2015

NÍVEL I

Considere um tabuleiro de xadrez comum 8×8, com as casas pintadas alternadamente de branco e preto. Um movimento permitido é trocar de posição duas linhas ou duas colunas.
Fazendo uma sequência de tais movimentos, é possível obter um tabuleiro no qual a metade das casas sejam brancas e na outra metade as casas sejam pretas?

SOLUÇÃO

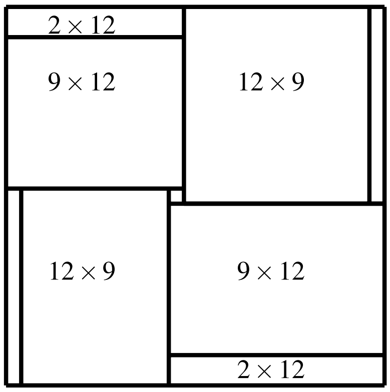
Não é possível.
Observe que a mudança de posição de duas colunas (ou de duas linhas) não altera o número de casas pretas (nem o número de casas brancas) numa coluna (ou linha) do tabuleiro, que inicialmente é 4. Portanto, nunca poderemos obter uma coluna (ou uma linha) com todas as 8 casas de mesma cor.

NÍVEL II

Uma chapa quadrada de dimensões 23×23 foi formada juntando várias chapas quadradas de dimensões 1×1, 2×2, 3×3.
Qual é o número mínimo de chapas quadradas de dimensão 1×1 necessárias para fazer isso?

SOLUÇÃO

A resposta é: somente uma.
Divida a chapa quadrada de dimensões 23×23 em 23 colunas de dimensões 1×23 e 23 linhas de dimensões 23×1, formando um tabuleiro. Em seguida, numere as colunas da esquerda para direita: $1, 2, 3, \cdots, 21, 22, 23$.
Agora, pinte as colunas de número $2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23$. Assim, um total de $15 \times 23 = 365$ casas do tabuleiro foram pintadas. Observe que este número é ímpar. Logo, as chapas de dimensões 2×2 e 3×3 contém um número par de casas do tabuleiro **pintadas**. Portanto, no mínimo uma chapa de dimensões 1×1 tem de ser usada.
Na Figura a seguir, mostramos um exemplo (outros exemplos são possíveis!) de como formar a chapa 23×23 usando somente uma chapa de dimensões 1×1.



NÍVEL III

Seja K um número inteiro positivo. Duas pessoas, A e B, disputam o jogo seguinte em que jogam alternadamente. O jogador A escreve uma lista de inteiros positivos não maiores do que 25, não necessariamente distintos, tal que a soma deles seja no mínimo 200. O jogador B ganha se pode escolher alguns desses números de modo que a soma S satisfaz a condição $(200-K) \leq S \leq (200+K)$.
Qual é o menor valor de K para o qual o jogador B possui uma estratégia vencedora?

SOLUÇÃO

A resposta é $K = 11$.
Se $K = 11$, o jogador B pode simplesmente remover números da lista feita por A, começando pelo menor número da lista, até até que a soma dos restantes seja menor do 212.
Se o último número removido não foi nem o 24 nem o 25, então a soma dos restantes é no mínimo igual a $212-23 = 189$.
Se o último número removido foi o 24 ou o 25, então restam somente vários 24 e vários 25, e tem de existir exatamente 8 deles, pois a soma deles tem de ser menor do 212 e não menor do que $212-24 = 188$.
Assim, a soma S deles satisfaz:

$$8 \times 24 = 192 \leq S \leq 8 \times 25 = 200$$

Portanto, o jogador B vence.
Por outro lado, se $K \leq 10$, então o jogador A pode escrever o número 25 duas vezes e o número 23 sete vezes. Assim, a soma de todos os números é igual a 211, mas se no mínimo um número for removido, então a soma dos restantes é no máximo igual a 188, o que implica que o segundo jogador não pode vencer.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável, tal que $f(tX) = tf(X)$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$, e $t > 0$.
Mostre que f é linear.

SOLUÇÃO

Para t fixo, defina $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $L(X) = tX$.
Então L é diferenciável em $\mathbb{R}^n$, com $L'(X) = tI$, onde I é a matriz identidade.
Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(X) = f(L(X))$. Pela regra da cadeia, temos:

$$F'(X) = f'(L(X)).L'(X) = tf(X).$$

Mas, pela definição de f, $F(X) = tf(X)$, o que implica $tf(X) = tf'(X)$ também. Como $t \neq 0$, pois $t > 0$, segue que $f'(tX) = f'(X)$, para todo $t > 0$, o que implica que $f'(X)$ é constante e f é linear.