OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 14 - Data 01/06/2015

NÍVEL I

Escrevem-se os números inteiros de 1 a 37 em linha reta, de modo que cada número divide a soma de todos os números previamente escritos. Se o primeiro número é 37 e o segundo número é 1 qual é o terceiro número?

SOLUÇÃO

Seja x o último número da lista. Então, pelas hipóteses do problema, x tem de dividir o número $(1+2+3+\cdots+37)-x$, o que implica que x divide $(1+2+3+\cdots+37)=703=37\times 19$. Como $x\neq 37$, pois 37 é o primeiro da lista, segue que $x=19$. Por outro lado, o terceiro número da lista, y, tem de dividir $37+1=38=2\times 19$. Como $y\neq 19$, pois 19 é o último número da lista, segue que $y=2$.

NÍVEL II

Escreva os números inteiros de 1 a 16 em linha reta, de modo que a soma de quaisquer dois números adjacentes seja um quadrado perfeito. Dê uma explicação para o fato de que você não consegue fazer isso colocando os números em volta de um círculo.

SOLUÇÃO

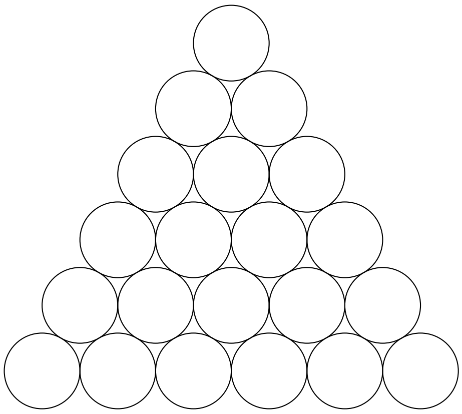
A solução é arrumar os números em linhja reta como segue: $16,9,7,2,14,11,5,4,12,13,3,6,10,15,1,8$.
Imagine que seja possível arrumar os números em volta de um círculo com a mesma propriedade.
Assim , sejam x e y os números adjacentes ao número 16. Observe que:

$$17=16+1\leq 16+x, \qquad e \qquad 16+y\leq 16+15=31$$

Como $16+x$ e $16+y$ são quadrados perfeitos, (se $16+x=36$, teríamos $x=20$, o que não é possível) temos que ter necessariamente $16+x=16+y=25$, o que implica $x=y$, que é uma contradição pois os números são distintos.

NÍVEL III

Consider $\frac{n(n+1)}{2}$ moedas iguais formando um triângulo equilátero com n moedas em cada lado, veja Figura a seguir, para o caso em que $n=6$.



Inicialmente, cada uma das moedas está com a faces coroa (K) voltada para cima. Um movimento ´permitido é desvirar três moedas que são mutuamente adjacentes. O objetivo é colocar todas as moedas com face cara (C) voltada para cima.
Para que valores de n isto vai ser possível?

SOLUÇÃO

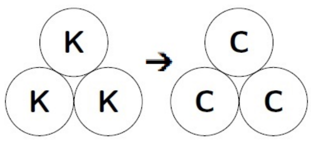
A resposta é: $n = 3m$ ou $n = 3m+2$, onde m é um número natural.
Observe que, dado um número inteiro qualquer n, quando dividimos n por 3, existe uma, e somente uma, das possibildades possíveis:

$$ou\ n\ deixa\ resto\ 0,\ ou\ n\ deixa\ resto\ 1,\ ou\ n\ deixa\ resto\ 2.$$

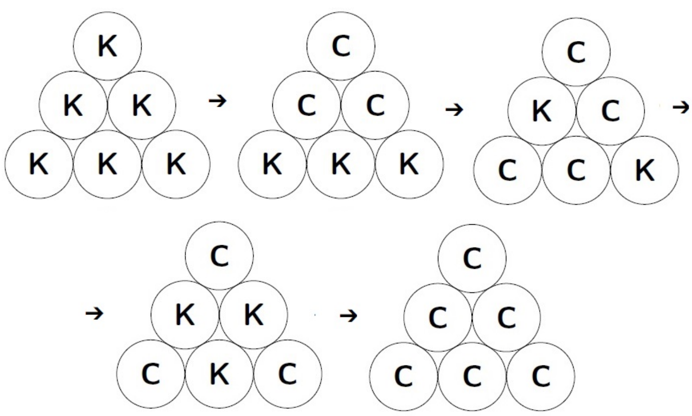
Isto equivale a dizer que:

$$n = 3m,\ ou\ n = 3m+1,\ ou\ n = 3m+2,\ com\ m\ um\ número\ inteiro.$$

Inicialmente, mostraremos que se $n = 3m,\ ou\ n = 3m+1$, o resultado é verdadeiro. Em seguida, mostraremos que se $n = 3m+2$, o resultado não é verdadeiro.
É fácil ver que para $n = 2 = 3\times 0+2$ o resultado é verdadeiro. De fato, na situação de termos duas moedas formando o lado do triângulo equilátero, num único movimento, conseguiremos virar todas as moedas:



Na situação de termos três moedas formando o lado do triângulo equilátero, o resultado também é verdadeiro. De fato, neste caso, a figura posui quatro triângulos equilátero com 2 moedas de cada lado. Então aplique o caso anterior para cada um desses quatro triângulos, veja Figura a seguir.



Para o caso em que n é um número grande, aplique o movimento permitido para cada triângulo formado por três moedas; os vértices são desvirados uma vez, e as moedas ao longo dos lados do triângulo são desviradas três vezes, de modo que todas ela ficam com a face cara virada para cima. Algumas moedas localizadas no interior do triângulo, formando um triângulo de lado $n-3$, são desviradas seis vezes. O resultado segue por indução.
Agora suponha que n deixa resto 1 na divisão por 3, isto é, $n = 3m+1$, com m um inteiro.
Pinte todas as moedas de amarelo, vermelho e azul, de maneira tal que quaisquer três moedas adjacentes sejam de cores distintas; também quaisquer três moedas numa linha terão cores distintas.
Se as moedas situadas nos vértices do triângulo forem pintadas de amarelo, existirá uma moeda amarela a mais do que as azuis e as vermelhas. Isto significa que, ao longo do jogo, a paridade do número de moedas amarelas com a face cara para cima começa diferente da paridade do número de moeda vermelhas com face cara voltada para cima. Como cada movimento muda a paridade do número de caras de cada cor, não podemos terminar com a paridade do número de moedas amarelas com face cara para cima igual ao de moedas vermelhas com a face cara para cima. Portanto, neste caso, não é possível colocar todas as moedas com face cara (C) voltada para cima.

NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Temos sobre uma mesa, e em linha reta, 16 cartas. Cada carta possui uma face preta e uma face vermelha e inicialmente as cartas aparecem com a face para cima alternadamente preta e vermelha, sendo a primeira carta mais a esquerda com a face preta voltada para cima. Um jogo com essas 16 cartas é tal que um movimento permitido consiste em tomar uma sequência de cartas (pode ser formada por uma só carta) e desvirá-las, mas nesta sequência, a primeira carta, contadas da esquerda para direita, tem de ter a face preta voltada para cima e as restantes a face vermelha. O jogo termina quando não for mais possível efetuar um movimento.
Qual é o número máximo de movimentos que pode ser feito antes do final do jogo?

SOLUÇÃO

A resposta é 43690.
Vamos chamar de 1 a cor da face preta e de 0 a cor da face vermelha. Com isso, toda disposição das cartas sobre a mesa corresponde a um número na base 2.
Na linguagem binária, um movimento significa a subtração do número correspondente a distribuição das cartas sobre a mesa por uma potência de 2. Como é possível subtrair 14, podemos fazer um número de movimentos igual ao número binário do início, que é:

$$2^{15}+2^{13}+2^{11}+\cdots+2^{3}+2^{1} = \frac{2^{16}-1/2}{1-1/2^{2}} = 2\times\frac{2^{16}-1}{3} = 43690.$$