OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Prezados Estudantes, Professores de Matemática e Diretores de Escolas,

Os **Problemas das Listas Semanais** são um incentivo a mais para que os estudantes possam se divertir estudando Matemática, ao mesmo tempo em que se preparam para as Competições Matemáticas. Por favor, fixsem os problemas em local onde todos os estudantes da Escola possam tomar conhecimento.
As Listas com Problemas Semanais de anos anteriores podem ser encontrados no endereço:
http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br - na pasta Treinamento.
Contatos com a Coordenação da OMRN:
cgomesmat@yahoo.com.br ou cgmat@ccet.ufrn.br ou iesus_diniz@yahoo.com.br ou bene@ufrnet.br.
Por favor, divulguem os problemas!

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL N$^{\underline{o}}$ 15 - Data 08/06/2015

NÍVEL I

Utilizando uma ou mais vezes os dígitos $0, 1, 2$ e 5, quantos números naturais de quatro dígitos, e que sejam múltiplo de três, podemos escrever?

SOLUÇÃO

A resposta é 63.
Observe que, para que um número seja múltiplo de 3, a soma de seus dígitos deve ser um múltiplo de 3. Na tabela abaixo, escrevemos todos os números pedidos, ordenando-os de acordo com o valor da soma, S, de seus dígitos.

Soma S = 3						Quantidade de Números
1011	1101	1110				3
1002	1020	1200	2001	2010	2100	6
Soma S = 6						
1122	1212	1221	2112	2121	2211	6
1005	1050	1500	5001	5010	5100	6
2022	2202	2220				3
Soma S = 9						
1125	1152	1215	1251	1512	1521	6
2115	2151	2511	5112	5121	5211	6
2025	2052	2205	2250	2502	2520	6
5022	5202	5220				3
Soma S = 12						
1155	1515	1551	5115	5151	5511	6
2055	2505	2550	5025	5052	5005	6
5250	5502	5520				3
Soma S = 15						
5055	5505	5550				3
TOTAL DE NÚMEROS						63

NÍVEL II

Encontre todos os pares de números racionais positivos, (a, b), tais que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

SOLUÇÃO

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação dada, temos

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab} = 2+\sqrt{3} \qquad (*)$$

A equação $(*)$ pode ser escrito como

$$2\sqrt{ab} = \underbrace{2-a-b}_{r\,\in\,\mathbb{Q}}+\sqrt{3}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado temos

$$4ab = r^2+3+2r\sqrt{3} \Leftrightarrow 2r\sqrt{3} = (4ab-r^2-3) \in \mathbb{Q},$$

o que implica que $r=0$. Assim, $4ab=3$. Ou seja, $ab=3/4$. Substituindo esse valor em $(*)$, temos

$$a+b+2\sqrt{3/4} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a+b=2.$$

Como $ab=3/4$ e $a+b=2$, segue a,b são as raízes da equação quadrática $x^2-2x+3/4=0$, que são $3/2$ *e* $1/2$.
Portanto, as duas soluções são: $(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ e $(a,b)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

<u>NÍVEL III</u>

Pinta-se cada um dos vértices dum polígono regular de 20 lados ou de vermelho ou de azul. Depois da pintura, o número de vértices vermelhos é igual a 9, enquanto o número de vértices azuis é igual a 11. Prove que no mínimo dois vértices azuis são extremos de um diâmetro do círculo circunscrito ao polígono dado.

SOLUÇÃO

Vamos usar o Princípio das Casas dos Pombos para provar.
Neste caso, as casas dos pombos vão ser os diâmetros do polígono regular de 20 lados cujos extremos são vértices do polígono.
Cada um destes diâmetros conecta 2 vértices opostos. Todas as casas dos pombos tem um limite para sua ocupação: cada uma delas contém 2 pontos no máximo, que são os extremos do diâmetro correspondente. Seu número é igual a 10. Considere as casas dos pombos que possuem pelo menos um vértice vermelho. O número delas é no máximo igual a 9. Como são 10 as casas dos pombos, então existe uma casa sem um vértice vermelho nela. Isto significa que, as extremidades do diâmetro correspondente são azuis e isto termina a prova.

<u>NÍVEL UNIVERSITÁRIO</u>

Arranje 27 bolas pesando em gramas

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2, \cdots,\ 26^2,\ 27^2,$$

respectivamente, em 3 pilhas de iguais massas.

SOLUÇÃO

Sabe-se que:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Assim, quando $n=27$, temos

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+26^2+27^2 = \frac{27\times 28\times 55}{6},$$

e, portanto, cada pilha deve ter como massa total $\frac{1}{3} \times \frac{27 \times 28 \times 55}{6} = 2310$ gramas. Para um número natural n conveniente, tomamos 9 bolas pesando:

$$n^2,\ (n+1)^2,\ (n+2)^2,\ \cdots,\ (n+8)^2$$

gramas, respectivamente. Agora formamos 3 grupos delas, a partir de seus pesos, da seguinte maneira:

- Grupo I: $n^2,\ (n+5)^2,\ (n+7)^2 \qquad (*)$.
  Observe que: $n^2+(n+5)^2+(n+7)^2 = 3n^2+24n+74$.
- Grupo II: $(n+1)^2,\ (n+3)^2,\ (n+8)^2 \qquad (**)$.
  Observe que: $(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2 = 3n^2+24n+74$.
- Grupo III: $(n+2)^2,\ (n+4)^2,\ (n+6)^2 \qquad (***)$.
  Observe que: $(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2 = 3n^2+24n+56$.

Observe que os Grupos I, e II são compostos por bolas com pesos totais iguais. O Grupo III tem as bolas com peso total 18 menos do que o peso total de cada um dos dois primeiros grupos.
Fazendo $n=1$ em $(*),\ (**)\ e\ (***)$, obtemos a composição de cada grupo:

- Grupo IA: $1^2,\ 6^2,\ 8^2$
- Grupo IIA: $2^2,\ 4^2,\ 9^2$
- Grupo IIIA: $3^2,\ 5^2,\ 7^2$.

Agora, fazemos a mesma coisa para $n=10$, encontramos:

- Grupo IB: $10^2,\ 15^2,\ 17^2$
- Grupo IIB: $11^2,\ 13^2,\ 18^2$
- Grupo IIIB: $12^2,\ 14^2,\ 16^2$.

Agora, fazemos a mesma coisa para $n=19$, encontramos:

- Grupo IC: $19^2,\ 24^2,\ 26^2$
- Grupo IIC: $20^2,\ 22^2,\ 27^2$
- Grupo IIIC: $21^2,\ 23^2,\ 25^2$.

Finalmente, arranjamos as bolas em 3 pilhas da seguinte maneira:

PILHA 1 = Grupo IA + Grupo IB + Grupo IIIC: $1^2,\ 6^2,\ 8^2,\ 10^2,\ 15^2,\ 17^2,\ 21^2,\ 23^2,\ 25^2$

PILHA 2 = Grupo IIA + Grupo IIC + Grupo IIIB: $2^2,\ 4^2,\ 9^2,\ 20^2,\ 22^2,\ 27^2,\ 12^2,\ 14^2,\ 16^2$

PILHA 3 = Grupo IIIA + Grupo IIB + Grupo IC: $3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 18^2,\ 19^2,\ 24^2,\ 26^2$.

Observe que, em cada pilha o total de massa é igual a 2310 gramas, o que conclui o arranjo pedido.