Notas de Aula:

EXPOENTES, ÁREAS E LOGARITMOS

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

2015

0.1 Prefácio

Estas Notas de Aulas foram escritas, como material complementar, para os estudantes do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, promovido pela Secretaria de Educação a Distância, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Ao escrever estas Notas de Aulas, procuramos ser o mais claro possível, com o objetivo de facilitar o entendimento do aluno de um curso não presencial. Por isso, apresentamos no texto muitos exemplos com resoluções completas, as quais esperamos que estejam suficientemente claras e contribuam para a melhoria da prática docente do professor-cursista.

Alguns textos foram de importância fundamental para a elaboração destas Notas, veja a bibliografia apresentada ao final. Destacamos o livro de leitura agradável, com bonitas exposições de idéias que são acessíveis aos estudantes do Ensino Médio, **Logaritmos**, do Prof. Élon Lages Lima, e os belos livros **Ossifrage and Algebra (Elementary Algebra)** e **Andragogic Propaedeutic Mathematics (A Course in Arithmetic)**, do jovem professor americano David A. Santos, infelizmente (prematuramente) falecido.

Estas Notas de Aula foram escritas usando o editor Latex, e constituiram para o autor uma excelente oportunidade para treinamento. Durante a elaboração destas Notas, frequentemente, visitamos o endereço

http://tex.stackexchange.com

a fim de sanar dúvida sobre o Latex.

Todos os erros e equívocos são de nossa responsabilidade. Receberemos com alegria comentários apontando eventuais erros, como também formas de melhorar o texto.

Natal, junho de 2015

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire
E-mail: beneditofreire22@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Conjunto dos Números Naturais

Nesta seção damos uma visão rápida sobre os números naturais, comumente denotado por:

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \cdots\}.$$

O conjunto dos números naturais é munido de duas operações **+** e **·**: $(\mathbb{N}, +, .)$.
Começando com o símbolo 1, e a operação: $+$, juntamos os elementos e definimos os símbolos:

$$1+1=2, \quad 1+1+1=3, \quad 1+1+1+1=4, \quad 1+1+1+1+1=5, \quad \ldots$$

para formar o conjunto $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, 8,\ 9,\ 10, 11,\ \cdots\}$.
Observe que o conjunto dos números naturais é:

- *infinito*
- *ordenado*.

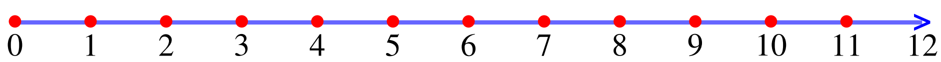
Um conjunto qualquer A chama-se **finito** quando for vazio ou quando existir um número inteiro positivo n e uma bijeção $f : A \longrightarrow \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$. Um conjunto é **infinito** quando ele **não** é finito.
Dizer que o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é **ordenado** significa dizer que podemos comparar quaisquer dois de seus elementos e dizer se um é maior ou menor do que o outro.

Normalmente, para escrever um número natural usamos o **sistema decimal** com os dez símbolos (dígitos): $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Nesse sistema, um número tem um ou mais dígitos e cada um deles tem um peso que é uma potência de 10. Por exemplo, o número 72345 significa:

$$72345 = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0.$$

Nessa notação, no número 72345, o dígito 7 não significa "7," mas $7 \cdot 10^4 = 70.000$; o dígito 2 não significa "2," mas $2 \cdot 10^3 = 2000$, etc.

Podemos interpretar o conjunto dos números naturais como um conjunto de pontos linearmente ordenado, veja Figura seguir.



Esta interpretação do conjunto dos números naturais induz uma **ordem** definida como:

Sejam a e b dois números naturais. Dizemos que a **é estritamente menor do que** b, se o número a está colocado sobre a reta à esquerda do número b.
Denotamos este fato por $a < b$ (ou $b > a$).

Observações

(i) O símbolo $\in$ é usado para indicar que um dado elemento pertence a um certo conjunto. Em simbolo, a negação de $\in$ é $\notin$.
Por exemplo, $1 \in \mathbb{N}$, porque 1 é um número natural, mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
(ii) Se somamos ou multiplicamos dois números naturais, o resultado é um outro número natural. Resumimos este fato com o seguinte

Axioma do Fecho

O conjunto dos números naturais é **fechado para soma e para a multiplicação**, isto é, se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então $a+b \in \mathbb{N}$ e $ab \in \mathbb{N}$.
(iii) Se somamos 0 com qualquer número natural, o resultado é o próprio número, não muda. Se multiplicamos o número 1, por qualquer número natural o resultado é o próprio número, não muda. Este resultado é conhecido como

Axioma da Identidade para Soma e Multiplicação

O número $0 \in \mathbb{N}$ é o **elemento identidade para a operação soma**, isto é, para todo número $x \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$x = 0 + x = x + 0.$$

O número $1 \in \mathbb{N}$ é o **elemento identidade para a operação multiplicação**, isto é, para todo número $a \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a = 1 \cdot a = a \cdot 1.$$

(iii) É fácil ver que, quando se soma ou se multiplica dois números naturais o resultado não depende da ordem. Resumimos este fato com seguinte

Axioma da Comutatividade

Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$. Então temos: $a+b = b+a$ e $ab = ba$.

Dois outros axiomas importantes para os números naturais segue a seguir:

Associatividade

Sejam a, b, c números naturais. Quando se efetua a soma seguinte a ordem dos parênteses é irrelevante, isto é:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

De maneira análoga, quando se efetua a soma seguinte a ordem dos parênteses é irrelevante, isto é:

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

Distributividade

Sejam a, b, c números naturais. Então temos:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

e

$$(a+b)c = ac+bc.$$

Observação
O produto de dois números naturais mn significa:

$$mn = \underbrace{n+n+\cdots+n}_{m \text{ parcelas}} = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ parcelas}}.$$

Exemplo 1.1.1 *Quando escrevemos o produto* $(5)(6)$ *dizemos*

$$(5)(6) = 5+5+5+5+5+5 = 6+6+6+6+6 = 30.$$

Exemplo 1.1.2 *A expressão* $(3)(5)+(6)(4)$ *significa que temos que primeiro efetuar a multiplicação e, em seguida, efetuar a soma, obtendo:*

$$(3)(5)+(6)(4) = 5+5+5+6+6+6+6 = 39,$$

ou mais resumidamente:

$$(3)(5)+(6)(4) = 15+24 = 39.$$

1.1.1 Raízes

Nesta seção estudaremos a extração de raízes.

Definição
Seja m *um número natural maior do que ou igual a* 2, *e sejam* a *e* b *dois números naturais. Escrevemos*

$$\sqrt[m]{a} = b \quad \text{se} \quad a = b^m.$$

Neste caso, dizemos que b *é* ***a*** m***-ésima raiz de*** a. *O número* m *é chamado de* ***o índice da raiz****.*

Quando $m=2$, *não escrevemos o índice, simplesmente escrevemos:*

$$\sqrt{a} \quad \text{em vez de} \quad \sqrt[2]{a}.$$

Neste caso, o número $\sqrt{a}$ *é chamado de* ***a raiz quadrada de*** a.
O número $\sqrt[3]{a}$ *é chamado de* ***a raiz cúbica de*** a.

Para exemplificar:

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{1} = 1, & \text{porque} & 1^2 = 1, \\
\sqrt{4} = 2, & \text{porque} & 2^2 = 4, \\
\sqrt{9} = 3, & \text{porque} & 3^2 = 9, \\
\sqrt{16} = 4, & \text{porque} & 4^2 = 16, \\
\sqrt{25} = 5, & \text{porque} & 5^2 = 25, \\
\sqrt{36} = 6, & \text{porque} & 6^2 = 36.
\end{array}$$

Outros exemplos:

$$\begin{array}{lll}
\sqrt[10]{1}=1, & porque & 1^{10}=1,\\
\sqrt[5]{32}=2, & porque & 2^5=32,\\
\sqrt[3]{27}=3, & porque & 3^3=27,\\
\sqrt[3]{64}=4, & porque & 4^3=64,\\
\sqrt[3]{125}=5, & porque & 5^3=125.\\
\sqrt[10]{1024}=2, & porque & 2^{10}=1024.
\end{array}$$

Como já conhecemos o que significa somar e multiplicar números naturais, a seguir definimos a subtração e divisão de números naturais usando as duas operações já conhecidas.

Definição de Subtração

Sejam m,n,x *números naturais. A afirmação* $m-n=x$ *significa que* $m=x+n$.

Por exemplo, para calcular $12-7$ *procuramos um número natural que somado à* 7 *seja igual a* 12. *É fácil ver que* $12-7=4$, *pois* $12=7+5$.

Definição de Divisão

Sejam m,n,x *números naturais, com* $n\neq 0$. *A afirmação* $m\div n=x$ *significa que* $m=x\cdot n$.

Por exemplo, para calcular $28\div 4$, *procuramos um número natural que multiplicado por* 4 *seja igual a* 28. *É fácil ver que* $28\div 4=7$, *pois* $28=7\cdot 4$.

Observação

(i)Nem a subtração nem a multiplicação são fechadas em $\mathbb{N}$. *De fato, por exemplo,* $3-8$ *não é um número natural, e nem* $3\div 8$ *é um número natural.*
(ii) As duas operações subtração e divisão não são comutativas no conjunto dos números naturais. Por exemplo: $3-8\neq 8-3$ *e* $28\div 4\neq 4\div 28$.

Exemplo 1.1.3 *Para que números naturais* n *o número* $(48\div n)$ *é um número natural?*
Solução

Se $(48\div n)$ *é um número natural, então* n *divide o número* 48, *que é o mesmo que dizer que* n *é um divisor de* 48. *Portanto,* n *pode ser um dos elementos do conjunto* $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48\}$.

Exemplo 1.1.4 *Fazendo somente uma multiplicação, mostre que:*

$$\begin{aligned}
&(666)(222)+(1)(333)+(333)(222)\\
&+(666)(333)+(1)(445)+(333)(333)\\
&\quad+(666)(445)+(333)(445)+(1)(222) \;=\; 1.000.000.
\end{aligned}$$

Solução

Da Lei de Distributividade, temos

$$\begin{aligned}
&(666)(222)+(1)(333)+(333)(222) \\
&\quad +(666)(333)+(1)(445)+(333)(333) \\
&\quad +(666)(445)+(333)(445)+(1)(222) &= (666+333+1)(445+333+222) \\
& &= (1.000)(1.000) \\
& &= 1.000.000.
\end{aligned}$$

1.2 O Conjunto dos Números Inteiros

Sabemos que conjunto dos números naturais **não é fechado para a operação subtração**. Para resolver esta questão, expandimos o conjunto dos números naturais para obter uma coleção de números que seja fechada para adição. Chamamos esta nova coleção de números de **Conjunto dos Números Inteiros**, denotado por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, \ -5, \ -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \cdots\}$$

(O uso da letra $\mathbb{Z}$ para designar o conjunto dos números inteiros é porque a palavra número em alemão começa com Z: Zälhen.)

Deste modo, o conjunto dos números naturais é uma parte ou está contido no conjunto dos números inteiros.

Um número natural que não seja igual a 0 é dito ser **positvo**. Assim, **o conjuntos dos números inteiros positivos** é:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \cdots\}.$$

Dado um número natural n, definimos o **simétrico de** n **(ou oposto) com relação à operação de adição** como sendo, $-n$, o único número satisfazendo:

$$n + (-n) = (-n) + n = 0.$$

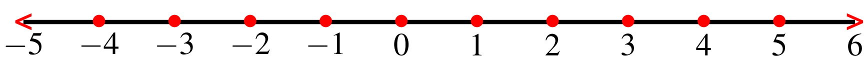
Chamamos a coleção de números

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -5, \ \cdots\},$$

formada por todos os simétricos dos números naturais com relação ao 0, de **conjunto dos inteiros negativos**. Portanto, temos que a união

$$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$$

De modo análogo aos números naturais, podemos interpretar o conjunto dos números inteiros como um conjunto de pontos linearmente ordenado, veja Figura seguir.



Esta interpretação do conjunto dos números inteiros induz uma **ordem** definida como:

Sejam a e b dois números inteiros. Dizemos que a **é estritamente menor do que** b, se o número a está colocado sobre a reta à esquerda do número b.
Denotamos este fato por $a < b$ (ou $b > a$).

Seja $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}$*. Se* $a > 0$*, então* $-a < 0$*. Se* $b < 0$*, então* $-b > 0$*.*
Assim, cada um dos números inteiros a *e* $-a$ *é o "reflexo" do outro com relação ao* 0 *e se* $a > 0$*, dizemos que* a *é* ***positivo****. Em particular, temos*

$$-(-a) = a.$$

Definimos cada uma das operações de adição, subtração, multiplicação e divisao de inteiros de tal modo que elas sejam consistentes com as respectivas operações no conjunto dos números naturais. Além disso, a adição e a multiplicação sejam comutativas, associativas e fechadas em $\mathbb{Z}$*, além da subtração ser também fechada. As operações também satisfazem a distributividade.*

1.3 Números Racionais, Irracionais e Números Reais

O conjunto dos números inteiros não é fechado para a operação divisão (por um número não nulo). Para resolver isso, ampliamos o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, *para um novo conjunto, que denotamos por* $\mathbb{Q}$, *chamado de* **conjunto dos números racionais**, *formado por todas as frações cujos numeradores e denominadores (não nulos) são números inteiros:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

As regras básicas para operações com números racionais decorrem das operações com frações e números inteiros.
O conjunto dos números racionais é ***fechado*** *para as quatro operações: soma, subtração, multiplicação e divisão.*

Exemplo 1.3.1 *Efetue:* $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{12} - \frac{7}{10} \div \frac{14}{15}$
Solução

Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{12} - \frac{7}{10} \div \frac{14}{15} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{12} - \frac{7}{10} \cdot \frac{15}{14} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{7}{2 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Prova-se que qualquer número racional possui uma expansão decimal que é ou repetidamente periódica ou termina e, reciprocamente, todo número que é uma expansão decimal que é periódica repetida ou termina é um número racional.

O número $\frac{1}{4} = 0.25$ *possui uma expansão decimal que termina.*
O número $\frac{1}{11} = 0.0909090909\ldots = 0.\overline{09}$ *possui uma expansão decimal periódica repetida.*
Nos dois exemplos acima, obtem-se a expansão decimal fazendo a divisão do númerador pelo denominador, usando o Algoritmo da Divisão (ou Algoritmo de Euclides):

$$\begin{array}{r|l}
1 & 4 \\ \cline{2-2}
1\,0 & 0,2\,5 \\
2\,0 & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1\,1 \\ \cline{2-2}
1\,0\,0 & 0,0\,9\,0\,9\,0\,9\,0\,9 \\
\quad 1\,0\,0 & \\
\qquad 1\,0\,0 & \\
\qquad\quad 1\,0\,0 & \\
\qquad\qquad 1\,0 &
\end{array}$$

Os números $\frac{1}{7}$ *e* $\frac{1}{17}$ *possuem, respectivamente, as seguintes expansões decimais:*

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \qquad \frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647},$$

Como podemos ver nos exemplos o período da expansão decimal pode ser de vários tamanhos. Veja outro exemplo a seguir.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 11 \\ \cline{2-2}
100 & 0{,}09090909 \\
\quad 100 & \\
\qquad 100 & \\
\qquad\quad 100 & \\
\qquad\qquad 10 &
\end{array}$$

Exemplo 1.3.2 *Diga, justificando, se o número* $3,666666\cdots$ *é um número racional ou não.*
Solução

Seja $K = 3,666666\cdots \qquad (*)$.
Multiplicamos ambos os lados por 10*, obtendo:* $10K = 36,6666\cdots \qquad (**)$.
Agora, efetuamos a subtração $(**) - (*)$*, obtendo*

$$10K - K = 36,6666\cdots - 3,666666\cdots \Leftrightarrow 9K = 36 - 3$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{36-3}{9} \Leftrightarrow K = \frac{33}{9}.$$

Como o número $K = 3,666666\cdots$ *se escreve com uma fração, onde o numerador e o denominador são os números inteiros* 33 *e* 9*, respectivamente, segue que* $K = 3,666666\cdots$ *é um número racional. A fração que representa* $K = 3,666666\cdots$ *é chamada de* ***fração geratriz****.*

Exemplo 1.3.3 *Encontrar a fração geratriz de* $0,126126126\cdots$
Solução

Seja $K = 0,126126126\cdots \qquad (*)$.
Multiplicamos ambos os lados por 1000*, obtendo:* $1000K = 126,126126126\cdots \qquad (**)$.
Agora, efetuamos a subtração $(**) - (*)$*, obtendo*

$$1000K - K = 126,126126126\cdots - 0,126126126\cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 999K = 126 - 0 \Leftrightarrow K = \frac{126-0}{999} \Leftrightarrow K = \frac{126}{999}.$$

Pergunta: *Que números possui expansão decimal infinita e não repetitiva?*

Um número cuja expansão decimal é infinita e não repetitiva é chamado ***número irracional****.*
Um número irracional ***não pode*** *ser escrito com uma fração cujo numerador e denominador (não nulo) são números inteiros.*

Exemplo 1.3.4 *O número* $0.1010010001000010000010000001\ldots$*, é racional ou irracional?*
Solução

Observe que a quantidade de 0 *entre dois dígitos* 1 *consecutivos aumenta, da esquerda para direita, na sequência:* $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$. *Como a quantidade de* 0 *está crescendo, esta decimal infinita* ***não*** *tem um período repetido e, de acordo com nossa definição, é um número irracional.*

Usando sua calculadora ou seu computador para calcular $\sqrt{2}$*, você obtém como resposta o número*

$$1,4142135623730950488016887242097.$$

Esta é uma resposta exata? A expansão decimal se repete?

A resposta para as duas perguntas acima são dadas a partir da solução do seguinte:

Exemplo 1.3.5 *Prove que* $\sqrt{2}$ ***não*** *é um número racional*
Solução

Suponha o contrário, isto é, que $\sqrt{2}$ *seja um número racional. Isto significa que existem dois números inteiros* a*,* b*, com* $b \neq 0$*, para os quais* $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$*. Podemos supor que a fração* $\frac{a}{b}$ *seja uma fração reduzida, isto é, os números inteiros* a, b *não possuem qualquer divisor em comum. Agora,*

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \;\Rightarrow\; (\sqrt{2})^2 = (\frac{a}{b})^2 \;\Leftrightarrow\; 2 = \frac{a^2}{b^2} \;\Leftrightarrow\; 2b^2 = a^2.$$

A última igualdade significa que o número inteiro a^2 *é par. Mas, se o quadrado de um número inteiro é par, o número é par, pois, um número ímpar ao quadrado é sempre ímpar:*

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,\ onde\ m = 2k^2 + 2k).$$

Assim, como a *é par, temos que* $a = 2s$*, onde* s *é um número inteiro. Logo, temos que*

$$2b^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; 2b^2 = (2s)^2 = 4s^2 \;\Rightarrow\; b^2 = 2s^2,$$

o que implica que b^2 *é um número par, de onde se conclui que* b *é um número par. Mas, isso é uma contradição, pois se ambos* a, b *são pares eles possuem um divisor comum: o número* 2*, que é contrário a nossa hipótese inicial.*
Portanto, $\sqrt{2}$ ***não*** *é um número racional.*

Como $\sqrt{2}$ *é irracional, a resposta de sua calculadora ou computador é somente uma aproximação e a expansão decimal não é repetitiva ou periódica.*

Prova-se (é um exercíco de um curso de Teoria dos Números, por exemplo) que se n e um número natural que não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ *é um número irracional.*

Portanto, podemos concluir que os números: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}, \sqrt{10}$, *etc., são números irracionais.*

In 1760, Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), cientista suíço que fez importantes contribuições para matemática, física (especialmente óptica), filosofia, astronomia, provou que o ***número*** π*, a razão entre o comprimento de um círculo qualquer e o comprimento de seu diâmetro,* ***é um número irracional.*** *Não daremos aqui esta demonstração porque não temos aqui os pré-requisitos necessários para tal.*

Quando escrevemos que $\pi = 3,14$, *queremos tão somente usar uma mera aproximação para o número* π. *Agora, escrever* $\pi = \frac{22}{7}$, *or* $\pi = \frac{355}{113}$, *etc.,* ***comete-se erro****, pois o número* π *não é um número racional. Estas frações são meras aproximações do valor de* π.

Observação

É conveniente observar que o π *em si não é um número, mas uma letra do alfabeto grego que é usada para representar uma constante (um número), que é o quociente entre duas medidas: o comprimento de um círculo e seu respectivo diâmetro. O surpreendente é que a razão entre estas duas medidas* ***independe*** *do tamanho (do raio) do círculo. Em todos os círculos, o quociente entre o comprimento e seu respectivo diâmetro é sempre igual a*

$$3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459\cdots\cdots$$

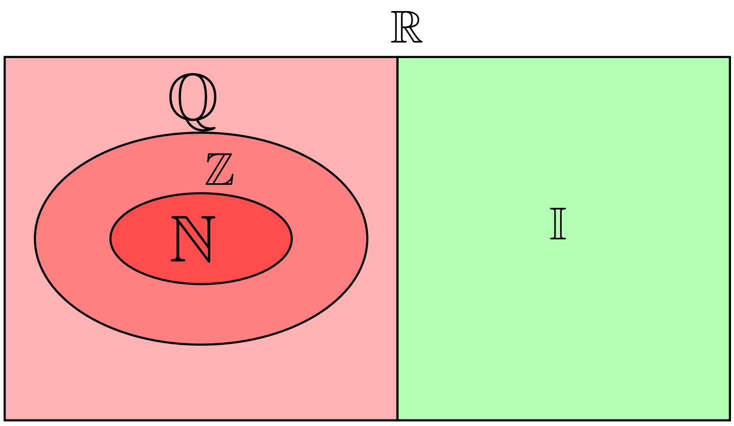
Definição

O conjunto dos ***números reais****, denotado por* $\mathbb{R}$, *é a coleção formada por todos os números racionais acrescida de todos os números irracionais.*
Se chamarmos a coleção dos números irracionais de $\mathbb{I}$, *em termos da notação de conjuntos, temos que:*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R};$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}; \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Veja o diagrama a seguir.



1.4 Valor Absoluto

Definição
Seja $a \in \mathbb{R}$. *O* ***valor absoluto de*** a *é definido e denotador por:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0, \\ -a & \text{if } a < 0, \end{cases}$$

Observação
O valor absoluto de um número real é sempre maior do que ou igual a zero. Além disso, $|a| = 0$ *se, e somente se,* $a = 0$.

Exemplo 1.4.1 $|8| = 8$, *pois* $8 > 0$; $\quad |-7| = -(-7) = 7$, *pois* $-7 < 0$.

Exemplo 1.4.2 *Encontre o valor do número real* x *para o qual* $|x-1| = 2x$.
Solução

Observe que, como o valor absoluto de um número é sempre maior do que ou igual a zero, temos que

$$|x-1| = 2x \;\Rightarrow\; 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0.$$

Por outro lado, como $x \geq 0$, *existem duas possibilidades: ou* $x \geq 1$ *ou* $0 < x < 1$.
Se $x \geq 1$, *temos* $|x-1| = x-1$, *o que implica:* $|x-1| = 2x \Leftrightarrow x-1 = 2x \Leftrightarrow x = -1$, *que não satisfaz ao problema, pois* $x \geq 0$.
Se $0 < x < 1$, *temos* $|x-1| = -(x-1)$, *o que implica:* $|x-1| = 2x \Leftrightarrow -(x-1) = 2x \Leftrightarrow -x+1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, *que é a resposta do problema.*

Exemplo 1.4.3 *Seja* x *um números real. Se* $|x-1| = |x-2|$, *encontre o valor de* x.
Solução

Se $x < 1$ *segue que* $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ *e* $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. *Assim,* $-x+1 = -x+2 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2$. *Contradição. Logo, neste caso não há solução.*
Se $1 < x < 2$, *temos que* $|x-1| = x-1$ *e* $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. *Assim,* $x-1 = -x+2 \;\Leftrightarrow\; 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}$.
Se $x \geq 2$, *temos que* $|x-1| = x-1$ *e* $|x-2| = x-2$. *Assim,* $x-1 = x-2$, *o que é impossível. Logo, neste caso não há solução.*
Portanto, a única solução é $x = \frac{3}{2}$.

Observação
(1) É fácil ver que ***o valor absoluto de um número real*** x *é igual a:*

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

(Sugestão: Para verificar a afirmação, examine os casos em que: $x = 0$; $x > 0$ *e* $x < 0$*)*

*(2) O **valor absoluto** satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) Para cada $x \in \mathbb{R}$, *temos* $|x| \geq 0$, *se* $x \neq 0$.
(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *(Desigualdade Triangular).*
(iv) $|x+y| \geq |x| - |y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4.4 *Mostre que* $a \cdot 0 = 0$, *para todo número real* a.
Solução

Observe que, para todo número real a, *temos que* $a + 0 = a$. *Logo,*

$$a \cdot a = a \cdot (a+0) = a \cdot a + a \cdot 0,$$

o que implica $a \cdot 0 = 0$.

Exemplo 1.4.5 *Mostre que* $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, *para todo números reais* a *e* b.
Solução

Usando o exemplo anterior, é fácil provar que $0.b = 0$, *para todo número real* b.
Agora, podemos escrever: $0 = 0 \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b$. *Assim, temos que:* $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$, *o que significa dizer que* $(-a) \cdot b$ *é o inverso aditivo de* $a \cdot b$. *Portanto,* $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, *como queríamos provar.*

Exemplo 1.4.6 *Mostre que* $(-a) \cdot (-b) = (a \cdot b)$, *para todo números reais* a *e* b.
Solução

Temos que:

$$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (-b) + 0 = (-a) \cdot (-b) + [(-a) \cdot b + (a \cdot b)] =$$

$$= [(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b] + a \cdot b = (-a)[(-b) + b] + a \cdot b = [(-a) \cdot 0] + ab = 0 + ab = ab.$$

Portanto, $(-a) \cdot (-b) = (a \cdot b)$, *como queríamos provar.*

Exemplo 1.4.7 *Prove que* $|x-y| \geq |x| - |y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
Solução

Observe que, usando a desiguladade triangular, podemos escrever:

$$x = (x-y) + y \Rightarrow |x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y|.$$

Capítulo 2

Expoentes

*Se a é um número real qualquer e se n é um número natural, então a^n é a $n-$**ésima potência do número** a, sendo igual a:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ a's}.$$

Definimos que $a^0 = 1$, se $a \neq 0$.
*Em a^n, dizemos que a é **a base da potência** e n é o **expoente**.*
É oportuno observar, se o expoente, n, é um número natural, ele nos informa quantas vezes usamos o número a na multiplicação por ele mesmo.

Exemplo 2.0.8 *Calcule $a^3.a^4$.*
Solução

Como $a^3 = aaa$ e $a^4 = aaaa$, temos que :

$$(a^3).(a^4) = (aaa)(aaaa) = aaaaaaa = a^7,$$

pois a penúltima expressão consiste de sete a's.

De uma maneira geral, temos o seguinte:

Primeira Lei dos Expoentes
Seja a um número real e m,n números naturais. Então vale:

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Prova

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\ a's} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ a's} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n\ a's} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.9 *Desenvolva $(ab^3c^4).(a^5b^2c^2)$.*
Solução

Temos que:
$(ab^3c^4)(a^5b^2c^2) = a^{1+5}b^{3+2}c^{4+2} = a^6b^5c^6$.

Exemplo 2.0.10 *Desenvolva $(a^x)(b^{2y})(a^{2x}b^{2y})$.*
Solução

Temos que $(a^x)(b^{2y})(a^{2x}b^{2y}) = a^{x+2x}b^{2y+2y} = a^{3x}b^{4y}$.

Exemplo 2.0.11 *Desenvolva* $(a^{x-2y+z}).(a^{2x-y-z})(a^{x+y+z})$.
Solução

Temos que $(a^{x-2y+z}).(a^{2x-y-z})(a^{x+y+z}) = a^{x-2y+z+2x-y-z+x+y+z} = a^{4x-2y+z}$.

Exemplo 2.0.12 *Desenvolva* $5^5+5^5+5^5+5^5+5^5$.
Solução

Temos que $5^5+5^5+5^5+5^5+5^5 = 5.(5^5) = 5^{1+5} = 5^6 = 15625$.

Observação
No caso dos coeficiente numéricos serem distintos de 1, *usamos a associatividade e a commutatividade. Por exemplo:*
$(5x^2)(6x^3) = 5(x^2.6).x^3 = (5.6).(x^2.x^3) = 30x^{2+3} = 30x^5$.

Exemplo 2.0.13 *Desenvolva:* $\frac{a^5}{a^2}$.
Solução

Observe que:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = a^3.$$

Deste modo, é fácil concluir que $a^3 = a^{5-2}$.
Podemos generalizar, para o que chamaremos de

Segunda Lei dos Expoentes
Seja $a \neq 0$ *um número real e* m,n *números naturais tais que* $m \geq n$. *Então temos:*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Prova

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\ a's}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ a's}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-n\ a's} \\ &= a^{m-n}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.14 *Desenvolvemos a expressão* $\frac{2^9}{2^4}$ *como* $\frac{2^9}{2^4} = 2^{9-4} = 2^5 = 32$.

Exemplo 2.0.15 *Desenvolva:* $\frac{-24a^{12}b^9c^5d^2}{2a^6b^3c^4d^2}$
Solução

Temos que:

$$\frac{-24a^{12}b^9c^5d^2}{2a^6b^3c^4d^2} = -12a^{12-6}b^{9-3}c^{5-4}d^{2-2} = -12a^6b^6c^1d^0 = -12a^6b^6c.$$

Exemplo 2.0.16 *Desenvolva* $\frac{a^5b^4(a+b)^3}{a^3b^4(a+b)}$
Solução

Temos que

$$\frac{a^5b^4(a+b)^3}{a^3b^4(a+b)} = a^2(a+b)^2.$$

Agora, suponha que queremos calcular $(a^3)^5$. *Como o número* a^3 *está elevado a quinta potência, simplesmente multiplicamos* a^3 *por ele mesmo cinco vezes:*

$$(a^3)^5 = (a^3)(a^3)(a^3)(a^3)(a^3) = a^{3+3+3+3+3} = a^{15}.$$

Assim, enunciamos a lei de expoente dos expoentes:

Terceira Lei dos Expoentes
Sejam a *um número real e* m,n *números naturais. Então:*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Prova

Temos que

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\ a^m\text{'s}} \\ &= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{}_{n\ a'\text{s}}} \\ &= a^{mn}.\end{aligned}$$

A seguir, temos a
Quarta Lei dos Expoentes
Sejam a *e* b *números reais e* m *números naturais. Então, temos:*

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

Prova

Temos que:

$$\begin{aligned}(ab)^m &= \underbrace{ab\cdot ab\cdots ab}_{m\ ab's}\\ &= \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\ a's}\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{m\ b's}\\ &= a^m b^m.\end{aligned}$$

Exemplo 2.0.17 *Desenvolva* $(2ab^2c^3)^2(-3a^3bc^2)^3$.
Prova

Temos que:

$$\begin{aligned}(2ab^2c^3)^2(-3a^3bc^2)^3 &= (2^2(a^1)^2(b^2)^2(c^3)^2)((-3)^3(b^1)^3(c^2)^3)\\ &= (4a^2b^4c^6)(-27a^9b^3c^6)\\ &= -108a^{11}b^7c^{12}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.0.18 *Desenvolva: (i)* $(a^{x^3})^{2x}$ *(ii)*$25^3\cdot 4^3$
Solução

(i) Temos que $(a^{x^3})^{2x} = a^{2x^4}$.
(ii) Desenvolvendo, temos que: $25^3 4^3 = (25\cdot 4)^3 = 100^3 = 1.000.000$.

2.1 Expoentes Negativos

Seja $a \neq 0$ *um número real e* n *um número natural. Então temos que:*

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n a^{-n} \quad\Longrightarrow\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Com isso, damos uma interpretação para os expoentes negativos. Observe também que, tomando os inversos (ou recíprocos), temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n.$$

Exemplo 2.1.1 *Desenvolva* 2^{-5}
Solução

Desenvolvendo, temos: $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

Exemplo 2.1.2 *Calcule* $\frac{2^3}{2^7}$
Solução

Desenvolvendo, temos:

$$\frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Exemplo 2.1.3 *Efetue:* $\frac{2^{-5}}{3^{-3}}$
Solução

Desenvolvendo, temos: $\frac{2^{-5}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{2^5} = \frac{27}{32}$.

Exemplo 2.1.4 *Simplifique de maneira que a resposta tenha somente expoentes positivos:*

$$\left(\frac{x^{-6}}{y^9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{y^{-1}}{x^{-2}}\right)^2.$$

Solução

Temos que :

$$\left(\frac{x^{-6}}{y^9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{y^{-1}}{x^{-2}}\right)^2 = \frac{x^{18}}{y^{-27}} \cdot \frac{y^{-2}}{x^{-4}} = x^{18-(-4)}y^{-2-(-27)} = x^{22}y^{25}.$$

2.1.1 Lei Distributiva

A lei Distributiva para os números reais nos diz que se $a, b,$ *e* c *são números reais, então temos:*

$$a(b+c) = ab+ac, \qquad e \qquad (a+b)c = ac+bc.$$

Exemplo 2.1.5 *Aplique a Lei Distributiva para efetuar :*

$$\begin{aligned} -3xy^2(2x^3-5xy^3) &= (-3xy^2)(2x^3)-(-3xy^2)(5xy^3) \\ &= -6x^4y^2+15x^2y^5. \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} (-3a^2b)(-3ab^2+2b)-(a^2-3a^2b)(ab^2) &= 9a^3b^3-6a^2b^2-(a^3b^2-3a^3b^3). \\ &= 9a^3b^3-6a^2b^2+(-a^3b^2)+3a^3b^3 \\ &= 12a^3b^3-6a^2b^2-a^3b^2. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.6 *Use a Lei Distributiva para efetuar:* $(a+b)(c+d)$
Solução

Aplicando a distributividade, temos:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd.$$

Exemplo 2.1.7 *Aplique a Lei Distributiva para desenvolver* $(x-4)^2$.
Solução

Temos que:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= (x-4)(x-4)\\ &= x(x-4)-4(x-4)\\ &= x^2-4x-4x+16\\ &= x^2-8x+16.\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.8 *Aplique a Lei Distributiva para desenvovler* $(x+1)^3$
Solução

Inicialmente, encontramos

$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=x(x+1)+1(x+1)=x^2+x+x+1=x^2+2x+1.$$

Agora, usamos o resultado acima para encontrar:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)(x+1)^2\\ &= (x+1)(x^2+2x+1)\\ &= x(x^2+2x+1)+1(x^2+2x+1)\\ &= x^3+2x^2+x+x^2+2x+1\\ &= x^3+3x^2+3x+1.\end{aligned}$$

2.2 Expoentes Fracionários

Pergunta*: Como interpretamos uma potência com o expoente fracionário?*

Por exemplo, que número representa $2^{\frac{1}{2}}$*?*

Observe que, será natural pensar o produto: $2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}=2^{(\frac{1+1}{2})}=2.$
Portanto, pelo que vimos da definição de raiz, concluímos que $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$
De modo análogo, podemos ver que o número $2^{\frac{1}{3}}$ *é igual a* $\sqrt[3]{2}$*, pois*

$$2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})}=2^{(\frac{1+1+1}{3})}=2\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$$

Portanto, de um modo geral, se n *é um número natural, e* a *um número real positivo, temos que*

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

Agora, é fácil ver que, se n *é um número inteiro positivo e* m *é um número inteiro, temos que*

$$a^{(\frac{m}{n})}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Este fato decorre de que

$$a^{(\frac{m}{n})}=a^{(m\times\frac{1}{n})}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

e de que

$$a^{(\frac{m}{n})}=a^{(\frac{1}{n}\times m)}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exemplo 2.2.1 *Se* K *é um número real maior do que* 1*, escreva a expressão* $\sqrt[3]{K\sqrt[3]{K\sqrt[3]{K}}}$ *como uma potência.*

Solução

Observe que:

$$\sqrt[3]{K\sqrt[3]{K\sqrt[3]{K}}} = \sqrt[3]{K\sqrt[3]{K\cdot K^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{K\sqrt[3]{K^{(\frac{4}{3})}}} =$$

$$= \sqrt[3]{K\cdot K^{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{K^{\frac{13}{9}}} = K^{\frac{13}{27}}.$$

Exemplo 2.2.2 *Simplifique* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Solução

Observe que:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{(1+\sqrt{5})^3}{2^3} = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\cdot\sqrt{5}}{8} = \frac{16+8\cdot\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5};$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{(1-\sqrt{5})^3}{2^3} = \frac{1-3\sqrt{5}+15-5\cdot\sqrt{5}}{8} = \frac{16-8\cdot\sqrt{5}}{8} = 2-\sqrt{5}.$$

Portanto, pela definição de raiz, temos que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \qquad (*)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2-\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \qquad (**)$$

Agora, somando $(*)+(**)$*, temos que:*

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Exemplo 2.2.3 *Calcule* $\sqrt[3]{\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)}$.

Prova

Observe que

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{(1\cdot2\cdot4)\cdot(1^3+2^3+3^3+\cdots)}{(1\cdot3\cdot9)(\cdot(1^3+2^3+3^3+\cdots)}\right]} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 2.2.4 *Simplifique* $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.
Solução

Qualquer expressão com um denominador da forma $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ *pode ser simplificada por um processo chamado* ***racionalização do denominador****.*
Como temos que:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b,$$

podemos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$. *Assim,*

$$\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{14-3\sqrt{35}+5}{7-5} = \frac{19-3\sqrt{35}}{2}.$$

Exemplo 2.2.5 *Encontre dois números irracionais,* a *e* b, *para os quais*
(i) $a+b$ *seja um númeor racional.*
(ii) $a\cdot b$ *seja um número racional.*
(iii) a^b *seja um número racional.*
Solução

(i) Tome $a=3-\sqrt{2}$ *e* $b=\sqrt{2}$.
(ii) Tome $a=3-\sqrt{2}$ *e* $b=3+\sqrt{2}$.
(iii) Tome $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ *e* $b=\sqrt{2}$. *Neste caso temos:*

$$[\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = [\sqrt{2}]^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = [\sqrt{2}]^2 = 2\in\mathbb{Q}.$$

Capítulo 3

Progressões Aritméticas

*Uma **progressão aritmética** é uma sucessão de números na qual começamos com um dado número e definimos o próximo número somando uma quantidade fixa ao número inicial, definimos o segundo número da sucessão somando ao segundo a mesma quantidade fixa, e assim por diante. Isto é, se o número inicial é a e d é a quantidade fixa, então a **sucessão aritmética (ou progressão aritmética)** é da forma seguinte:*

$$a, \quad a+d, \quad a+d+d=a+2d, \qquad a+d+d+d=a+3d, \ldots,$$

*Aqui, o número a é chamado de **o primeiro termo**, o número $a+d$ é chamado de o segundo termo, o número $a+2d$ é chamado o terceiro termo, e assim por diante. O número d é a **diferença comum (ou razão)** entre dois quaisquer termos consecutivos.*

Por exemplo, a progressão aritmética $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$ possui o primeiro termo como sendo 2 e a diferença comum 3.
Observe que, neste exemplo temos o seguinte modelo:

$$2=2+3\cdot 0, \quad 5=2+3\cdot 1, \quad 8=2+3\cdot 2, \quad 11=2+3\cdot 3, \ldots,$$

Assim, se queremos encontrar o oitavo termo da sequência, fazemos a seguinte conta: $2+3\cdot 7=2+21=23$. Se queremos encontrar o termo de número 100 da sequência, fazemos a seguinte conta: $2+3\cdot 99=2+297=299$.

***Exemplo 3.0.6** Considere a seguinte progressão aritmética:*

$$4, 10, 16, 22, \ldots.$$

1. *Encontre o próximo termo da progressão.*
2. *Encontre o centésimo termo da progressão.*
3. *Encontre uma fórmula para o termo da progressão na posição n.*
4. *O número 100 é um termo da progressão? Se sim, ele está em que posição?*
5. *O número 101 é um termo da progressão? Se sim, ele está em que posição?*

Solução

Observe que o primeiro termo da progressão é 4 e a diferença comum é 6, pois $10-4=6=16-10=\cdots$. O termo que vem logo em seguida ao número 22 é o quinto termo, dado por $22+6=4+6\cdot 4=28$. Os termos da progressão dada satisfazem:

$$4=4+6\cdot 0, \quad 10=4+6\cdot 1, \quad 16=4+6\cdot 2, \quad 22=4+6\cdot 3, \cdots,$$

Assim, o centésimo termo da progressão é dado por: $4+6\cdot 99=598$.
Do modelo visto acima, concluímos que o termo na posição n é dado por $4+6\cdot(n-1)$.
Para obter um termo da progressão sempre somamos um múltiplo de 6 ao primeiro termo 4.

Isto significa que os números nesta progressão aritmética deixam resto 4 *na divisão por* 6. *Assim, como* $100 = 4 + 6 \cdot 16$ *deixa resto* 4 *na divisão por* 6, *podemos concluir que o número* 100 *está na progressão e é o décimo sétimo número. Por outro lado, como* $101 = 5 + 16 \cdot 6$, *isto é, deixa resto* 5 *na divisão por* 6, *segue que o número* 101 *não está na progressão. Logo, temos que a progressão contém os números:*

$$4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28,\ 34,\ 40,\ 46,\ 52,\ 58,\ 64,\ 70,\ 76,\ 82,\ 88,\ 94,\ 100,\ 106, \ldots.$$

Exemplo 3.0.7 *Quantos termos possui a progressão*

$$6, \quad 15, \quad 24, \quad \ldots, \quad 7476?$$

Solução

Observe que o primeiro termo é 6 *e a razão ou diferença comum é* 9. *Os termos possuem a seguinte lei de formação:*

$$6 = 6 + 9 \cdot 0, \quad 15 = 6 + 9 \cdot 1, \quad 24 = 6 + 9 \cdot 2, 33 = 6 + 9 \cdot 3, \quad \ldots,$$

de maneira tal que todos os termos da progressão são obtidos somando o número 6 *a um múltiplo de* 9. *Para encontrar a posição do número* 7476, *dividimos* 7476 *por* 9 *e encontramos*

$$7476 = 6 + 9 \cdot 830.$$

Isto significa que o número 7476 *está na posição* 831. *Portanto, existem* 831 *termos na progressão dada.*

A distribuição dos termos de uma progressão aritmética satisfaz a uma simetria, o que torna a soma de termos consecutivos fácil de ser encontrada. De fato, se x *é um termo da progressão e* d *é a razão, temos:*

$$\cdots,\ x - 4d,\ x - 3d,\ x - 2d,\ x - d,\ x,\ x + d,\ x + 2d,\ x + 3d,\ x + 4d, \cdots$$

A solução do problema do exemplo a seguir é atribuído a Gauss [1]

[1] **Johann Carl Friedrich Gauss (ou Gauß)** $(1777 - 1855)$, matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns o referem como "o príncipe da matemática". Gauss notabilizou-se em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele referia-se à matemática como "a rainha das ciências". Filho de pais humildes, o pai, Gerhard Diederich, era jardineiro e pedreiro, a mãe Dorothea Benze era analfabeta, não tendo registrado a data de nascimento de Gauss. Aos sete anos entrou para a escola. Segundo uma história famosa, seu diretor, Butner, pediu que os alunos somassem os números inteiros de um a cem, mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, mostrando sua resposta: 5050, que foi encontrada através do raciocínio que demonstra a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Butner reconheceu a genialidade do menino de dez anos, passou a incentivá-lo nos seus estudos, junto com seu jovem assistente, Johann Martin Bartels $(1769 - 1856)$, apaixonado pela matemática. Entre Bartels, com dezessete anos, e o aluno de dez nasceu uma boa amizade que durou toda a vida. FONTE: $http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss$.

Exemplo 3.0.8 *Encontre a soma dos números naturais de* 1 *a* 100*:*

$$1+2+3+4+5+\cdots+99+100.$$

Solução

O truque é considerar os cinquentas somas seguintes:

$$100+1, \quad 99+2, \quad 98+3, \quad \ldots, \quad 51+50.$$

Cada uma destas somas tem como total o número 101*, e, como é fácil de ver, existem* 50 *delas, o que significa dizer que:*

$$1+2+3+\cdots+99+100 = 101\cdot 50 = 5050.$$

A coleção de todos os múltiplos inteiros (positivos ou nulos) de um número natural n *forma uma progressão aritmética, cuja diferença comum é igual a n. Por exemplo, os múltiplos de* 4 *são:*

$$0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ \ldots,$$

que é uma progressão aritmética com a diferença comum (a razão) igual a 4*, e os múltiplos de* 7 *são*

$$0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ \ldots,$$

que é uma progressão aritmética com razão igual a 7*.*
É interessante observar que o Mínimo Múltiplo Comum [2]*,* $MMC(4,7)$*, é o menor inteiro positivo que é comum a ambas as listas de números acima:* $MMC(4,7)=28$*.*

Observação
Para o estudo do Algoritmo da Divisão as vezes é conveniente pensar os números naturais como sendo a união de subconjuntos. Por exemplo, para efeito do estudo da divisão por 2*, onde os possíveis restos na divisão são:* 0 *ou* 1*, escrevemos o conjunto dos números naturais como:*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\} \cup \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\},$$

onde o símbolo $\cup$ *é a* ***união*** *dos dois conjuntos, isto é, a coleção dos elementos comuns e não comuns aos dois subconjuntos.*
O subconjunto $\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$*, formado por todos os números naturais que deixam resto zero na divisão por* 2*, é a coleção dos* ***números naturais pares****, enquanto o subconjunto* $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\}$*, formado por todos os números naturais que deixam resto* 1 *na divisão*

[2] O **Mínimo Múltiplo Comum** de dois inteiros, a e b, é um número $m = MMC(a,b)$ se, e somente se,
(i) m é um inteiro positivo;
(ii) a divide m e b divide m (m é um múltiplo comum de a e b);
(iii) Se n é um múltiplo positivo de a e b, então $n \geq m$ (m é o menor múltiplo comum).

por 2*, é a coleção dos* ***números naturais ímpares*** *. Observe que os elementos dos dois subconjuntos estão em progressão aritmética com razão* 2*.*
Para efeito do estudo da divisão por 3*, onde os possíveis restos na divisão são:* $0,\ 1$ *ou* 2*, podemos escrever*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ldots\} \cup \{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ldots\} \cup \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ldots\}.$$

Como a interseção de quaisquer dois desses subconjuntos é vazia e a união de todos eles é o conjunto dos números naturais, dizemos que esses subconjuntos constituem ***uma partição*** *de* $\mathbb{N}$ *.*

Exemplo 3.0.9 *Descreva uma partição do conjunto dos números naturais em* 5 *subconjuntos, onde cada um deles é infinito e seus elementos estão em progressão geométrica*
Solução

Na divisão por 5*, os possíveis restos são:* $0,\ 1,\ 2,\ 3$ *ou* 4*. Assim, escrevemos:*

$$\mathbb{N} = \{0,\ 5,\ 10,\ldots\} \cup \{1,\ 6,\ 11,\ldots\} \cup \{2\ ,7,\ 12,\ldots\} \cup \{3,\ 8,\ 16,\ldots\} \cup \{4,\ 9,\ 13,\ldots\}.$$

Em cada um desses cinco subconjuntos os elementos estão em progressão aritmética de razão igual a 5*.*

Exemplo 3.0.10 *Encontre o vigésimo número da lista:*

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ldots$$

Solução

Observe que cada elemento da lista pode ser escrito com uma soma de 2 *mais um múltiplo de* 3*:*

$$2 = 2+3.\cdot 0; \quad 5 = 2+3\cdot 1; \quad 8 = 2+3\cdot 2, \quad 11 = 2+3\cdot 3; \quad 14 = 2+3\cdot 4,\cdots\cdots.$$

Assim, o vigésimo termo é dado por: $2+3\cdot 19 = 2+57 = 59$*.*

Exemplo 3.0.11 *Encontre o centésimo número da lista:*

$$1,\ 16,\ 31,\ 46,\ 61,\ 76,\ \ldots$$

Solução

Observe que cada elemento da lista pode ser escrito com uma soma de 1 *mais um múltiplo de* 15*:*

$$1 = 1+15.\cdot 0; \quad 16 = 1+15\cdot 1; \quad 31 = 1+15\cdot 2, \quad 46 = 1+15\cdot 3; \quad 61 = 1+15\cdot 4,\cdots\cdots.$$

Assim, o centésimo termo é dado por: $1+15\cdot 99 = 1+1485 = 1486$*.*

Exemplo 3.0.12 *Quantos termos existem na progressão aritmética seguinte e qual é a soma de todos eles?*

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14, \ldots,\ 3005$$

Solução

Observe que cada termo da progressão é igual a 2 *somado com um múltiplo de* 3 *e que* $3005 = 2 + 3 \cdot 1001$, *o que implica que existem* $1001 + 1 = 1002$ *termos.*
Para calcular a soma de todos os 1002 *termos da progressão, somamos os* 501 *termos:*

$$2 + 3005 = 3007, \quad 5 + 3002 = 3007, \quad 8 + 2999 = 3007, \quad 11 + 2996, \ldots, 1505 + 1508 = 3013,$$

concluindo que a soma dos 1002 *termos da progressão é igual:*

$$2+\ 5+\ 8+\ 11+\ 14+\ \ldots+\ 3005\ = 501 \times 3007 = 1.506.507$$

Exemplo 3.0.13 *Encontre a fórmula para o n-ésimo termo da progressão:*

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19, \ldots$$

Solução

Chamamos o primeiro termo da progressão de $a_1 = 3 + 4 \cdot 0$, *o segundo termo de* $a_2 = 3 + 4 \cdot 1$, *o terceiro termo de* $a_3 = 3 + 4 \cdot 2$, *e assim por diante.*
O modelo segue o padrão seguinte:

Posição	*Número*		
1	3	$=$	$3+4\cdot 0$
2	7	$=$	$3+4\cdot 1$
3	11	$=$	$3+4\cdot 2$
4	15	$=$	$3+4\cdot 3$
5	19	$=$	$3+4\cdot 4$
6	23	$=$	$3+4\cdot 5$
7	27	$=$	$3+4\cdot 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	399	$=$	$3+4\cdot 99$

É fácil ver que o termo geral, a_n *é da forma* $a_n = 3 + 4 \cdot (n-1) = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$, *onde* $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$.

Exemplo 3.0.14 *(AHSME-1987) Os primeiros* 4 *termos de uma progressão aritmética são* $a,\ x,\ b,\ 2x$. *Encontre o valor de* $\frac{a}{b}$.
Solução

Temos que a diferença entre dois termos consecutivos da progressão é dada por:

$$x-a=b-x=2x-b \Rightarrow 2x=a+b \Rightarrow x=\frac{a+b}{2},$$

o que implica que a progressão é

$$a,\ \left(\frac{a+b}{2}\right),\ b,\ (a+b).$$

Agora, como os números estão em ***p.a.****, observe que a diferença entre o quarto termo e o segundo é igual a diferença entre o terceiro termo e o primeiro. Assim, temos:*

$$(a+b)-\left(\frac{a+b}{2}\right)=b-a \Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)=b-a \Leftrightarrow a-b=2b-2a \Leftrightarrow 3a=b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{3}.$$

Exemplo 3.0.15 *(AHSC-1967) Dado os conjuntos cujos elementos são números inteiros consecutivos:* $\{1\},\ \{2,\ 3\},\ \{4,\ 5,\ 6\},\ \{7,\ 8,\ 9,\ 10\},\ \cdots,$ *onde cada conjunto possui um elemento a mais que o precedente, e sendo o primeiro elemento de cada conjunto igual a um a mais que o último elemento do conjunto precedente. Calcule,* S_{30}, *a soma dos elementos do* 30*-ésimo conjunto.*
Solução

Observe que o *n-ésimo* *conjunto contém* n *inteiros consecutivos e seu último elemento representa a soma do total de elementos da união dos* n *primeiros conjuntos, que é igual a:*

$$1+2+3+4+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n=$$

$$=(1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+[4+(n-3)]+\cdots=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1).$$

Portanto, o último elemento do *n-ésimo* *conjunto é igual a* $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$.
Assim, podemos escrever os elementos do *n-ésimo* *conjunto listando-os do último para o primeiro, de modo que a soma desses elementos seja igual a*

$$S_n=[\frac{1}{2}n(n+1)]+[\frac{1}{2}n(n+1)-1]+[\frac{1}{2}n(n+1)-2]+[\frac{1}{2}n(n+1)-3]+\cdots[\frac{1}{2}n(n+1)-(n-1)]=$$

$$=[\frac{1}{2}n(n+1)]-[1+\ 2+\ 3+\ 4+\cdots+(n-1)]=[n\times\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)]-[\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n^2+1).$$

Portanto, quando $n=30$, *temos* $S_{30}=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot(30^2+1)=13515.$

Exemplo 3.0.16 *A sequência*

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ \cdots$$

consiste de $1's$ *separados por blocos de* $2's$*, com* n $2's$ *no* n*-ésimo bloco. Encontre a soma dos primeiros* 1.234 *termos da sequência.*
Solução

Observe que o $k-$*ésimo* 1 *está na posição:*

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Além disso, $\frac{49\cdot 50}{2}<1.234<\frac{50\cdot 51}{2}$*, o que nos leva a concluir que temos* 49 *dígitos* $1's$ *dentre os primeiros* 1.234 *termos da sequência. Logo, todos os outros termos são iguais a* 2*, o que significa dizer que a soma de todos eles é* $1.234\times 2-49=2.419$*.*
Agora, observe que a soma de todos os termos até a ocorrência do k*-ésimo* 1 *é igual a*

$$1+(2+1)+(2+2+1)+(2+2+2+1)+\cdots+\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{k-1 \text{ parcelas}}+1=$$

$$=1+3+5+\cdots+(2k-1)=\frac{k\cdot(2k-1+1}{2}=k^2.$$

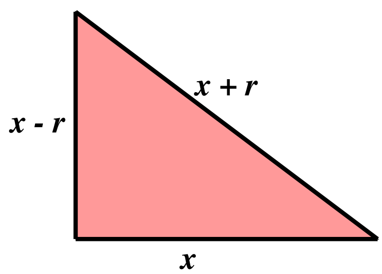
Por outro lado, o k*ésimo dígito* 1 *está na posição*

$$1+2+3+4+5+\cdots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}.$$

Isto implica que o último dígito 1 *dentre os primeiros* 1.234 *termos da sequência ocorre na posição* 1.225 *para* $k=49$*. Logo, a soma dos primeiros* 1.225 *termos da sequência é igual a* $49^2=2401$*, e a soma dos próximos* 9 *termos da sequência, que são todos iguais* ^{2}*, é igual a* $9\times 2=18$*, o que significa dizer que a soma de todos os primeiros* 1.234 *termos da sequência é igual a* $2.401+18=2.419$*.*

Exemplo 3.0.17 *Os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão em Progressão Aritmética. Sabendo-se que o perímetro mede* 57 *cm, quanto mede a hipotenusa?*
Solução

Como os comprimentos dos lados do triângulo estão em Progressão Aritmética, podemos escrever os três números como: $x-r$*,* x*,* $x+r$*, veja Figura a seguir.*



Como o perímetro do triânguo é 57, *temos:*

$$(x-r)+x+(x+r)=3x=57 \implies x=\frac{57}{3}=19.$$

Por outro lado, como o triângulo é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$(x+r)^2=(x-r)^2+x^2 \iff x^2+2xr+r^2=x^2-2xr+r^2+x^2 \iff 4xr=x^2 \iff 4r=x$$

Assim, $x=4\times 19=76.$ *Portanto, o comprimento da hipotenusa é* $76+19=95.$

Capítulo 4

Progressões Geométricas

Sejam a, q *dois números reais, com* $q > 0$. *Uma* ***progressão geométrica*** *é uma sequência da forma*

$$a, \; aq, \; aq^2, \; aq^3, \; aq^4 \ldots,$$

isto é, uma sequência onde cada número é obtido do anterior pela multiplicação pelo mesmo número. O número inicial é o ***primeiro termo*** *da progressão e o número* q *é a* ***razão***.

Exemplo 4.0.18 *Qual é o próximo termo da progressão geométrica*

$$2, \; 14, \; 98, \; 686 \ldots?$$

Solução

Observe que cada termo é obtido do anterior multiplicando-o por 7. *Assim, o próximo termo será:* $686 \times 7 = 4802$.

Exemplo 4.0.19 *Encontre a fórmula para o* n*-ésimo termo da progressão geometrica*

$$4, \; 24, \; 144, \; 864, \; 5184 \ldots.$$

Solução

O primeiro termo da progressão é 4*, os restantes segue a partir da multiplicação por 6. Assim, temos que*

$$4 = 4 \cdot 6^0, \qquad 24 = 4 \cdot 6^1, \qquad 144 = 4 \cdot 6^2, \qquad 864 = 4 \cdot 6^3, \qquad 5184 = 4 \cdot 6^4 \ldots.$$

Portanto, o termo geral é da forma $4 \cdot 6^{n-1}$*, onde* $n = 1, \; 2, \; 3, 4, \; \ldots$.

Exemplo 4.0.20 *Encontre o próximo termo da progressão geométrica*

$$3, \; 12, \; 48, \ldots$$

Solução

Observe os termos da progressão são da forma

$$3 = 3 \cdot 4^0, \qquad 4 = 3 \cdot 4^1, \qquad 48 = 3 \cdot 4^2, \ldots.$$

Assim, o próximo termo será $3 \cdot 4^3 = 192$.

Exemplo 4.0.21 *Encontre a soma dos termos da progressão geométrica*

$$1, \; 3, \; 9, \; 27, \; 81, \; 243, \; 729$$

Solução

Observe que:

$$1 = 1\cdot 3^0, \qquad 3 = 1\cdot 3^1, \qquad 9 = 1\cdot 3^2, \quad 27 = 1\cdot 3^3, \quad 81 = 1\cdot 3^4, \quad 243 = 1\cdot 3^5, \cdots, 729 = 1\cdot 3^6$$

Assim, temos que:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 \Leftrightarrow S = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \qquad (*)$$

Agora, multiplicando ambos os lados de $(*)$ *por* 3*, obtemos:*

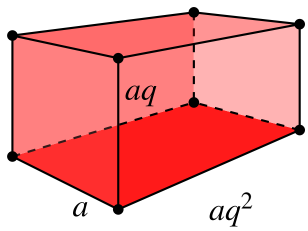
$$3S = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7. \qquad (**)$$

Diminuindo membro a membro $(**) - (*)$*, obtemos:*

$$3S - S = 2S = (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) - (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) = 3^7 - 3^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{3^7 - 3^0}{2} = \frac{2187 - 1}{2} = 1093.$$

Exemplo 4.0.22 *(AHSME-1986) O volume de um paralelepípedo sólido é* $8\ cm^3$*, sua área total é igual a* $32\ cm^2$ *e as três dimensões do paralelepípedo estão em progressão geométrica. Encontre, em* cm*, a soma de todas as arestas deste sólido.*
Solução



Como as três arestas estão em p. g., temos que seus comprimentos são a, aq, aq^2*, veja Figura acima. Assim, o volume do paralelepípedo sólido é dado por:*

$$V = a\cdot aq\cdot aq^2 = a^3\cdot q^3 = (aq)^3 = 8 \Rightarrow a\cdot q = 2.$$

Por outro lado, a área da superfície do sólidoo é dada por

$$2a^2 + 2a^2q^2 + 2a^2q^3 = 32 \Leftrightarrow 2\cdot(a\cdot q)\cdot(a + aq + aq^2) = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cdot 2)(a + aq + aq^2) = 32 \Leftrightarrow 4\cdot(a + aq + aq^2) = 32 \qquad (*).$$

Agora, observe que a expressão do lado esquerdo da igualdade $(*)$ *é precisamente a soma dos comprimentos de todas as arestas. Portanto, a resposta é igual a* 32.

Exemplo 4.0.23 *(AHSC-1972) Calcule a soma dos primeiros n termos da sequência*

$$1,\ (1+2),\ (1+2+2^2),\ (1+2+2^2+2^3),\ \cdots,\ (1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}),\cdots.$$

Solução

Observe que cada termo da sequência dada é igual à soma dos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2. Assim, o termo de ordem k da sequência dada é igual a

$$S_k = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1} \qquad (*)$$

Multiplicando ambos os termos da igualdade acima por 2, obtemos

$$2S_k = 2+2^3+2^4+\cdots+2^k \qquad (**)$$

Calculando $(**)-(*)$, obtemos:

$$S_k = 2S_k - S_k = (2+2^3+2^4+\cdots+2^k)-(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}) = 2^k-1.$$

Assim, a soma dos primeiros n termos da sequência dada é igual a

$$(2^1-1)+(2^2-1)+2^3-1)+(2^4-1)+\cdots+(2^n-1) =$$

$$= (2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{n \text{ parcelas}} =$$

$$= (2^{n+1}-2)-n = 2^{n+1}-n-2.$$

Exemplo 4.0.24 *(AHSC-1972) Inserindo dois números positivos entre os números 3 e 9, estabelecemos uma progressão geométrica com os três primeiros números, enquanto formamos uma progressão artimética com os três últimos números. Encontrar a soma desses dois números.*

Solução

Sejam a, b esses dois números. Assim, teremos a lista $3,\ a,\ b,\ 9,$ onde $3,\ a,\ b$ é uma progressão geométrica, enquanto $a,\ b,\ 9$ é uma progressão aritmética. Logo, temos:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{a} \qquad e \qquad b-a=9-b \Leftrightarrow a^2=3b \qquad e \qquad b=\frac{a+9}{2}$$

Substituindo, na primeira igualdade, o valor de b da segunda igualdade, temos:

$$a^2 = 3\frac{a+9}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{3a+27}{2} \Leftrightarrow 2a^2-3a-27=0 \text{ ou } (2a-9)\cdot(a+3)=0 \Rightarrow$$

$$a=\frac{9}{2} \text{ ou } a=-3$$

Como a é positivo, temos que $a=\frac{9}{2}$, o que implica $b=\frac{27}{4}$. Portanto, $a+b=\frac{45}{4}$.

Exemplo 4.0.25 *(AHSME-1999) Defina uma sequencia de números reais* $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ *por* $a_1 = 1$ *e* $a_{n+1}^3 = 99\cdot a_n^3$, *para cada número natural* $n \geq 1$. *Calcule* a_{100}.
Solução

Observe que, da hipótese, podemos concluir que $a_{n+1} = \sqrt[3]{99}\cdot a_n$, *para todo número natural* $n \geq 1$. *Assim, a sequência* $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ *é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é* 1 *e cuja razão é* $q = \sqrt[3]{99}$. *Deste modo, temos que:*

$$a_{100} = a_1\cdot q^{100-1} = \left(\sqrt[3]{99}\right)^{99} = 99^{33}.$$

Exemplo 4.0.26 *(AHSC-1961) Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são* $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{2}$. *Encontre o quarto termo.*
Solução

É facil ver que a razão da progressão geométrica dada é: $q = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$. *Assim, o quarto termo da progressão dada é igual a*

$$a_4 = a_1\cdot q^{4-1} = \sqrt{2}\cdot\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^0 = 1.$$

Exemplo 4.0.27 *Sejam* $a,\ q$ *números reais, com* $0 < q < 1$. *Calcule a soma infinita*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^n + \cdots$$

Solução

Observe que a soma dada possui infinitos termos e isto pode nos causar um certo desconforto inicial.
Como tratar com questões que envolvam o infinito?
A percepção de que o infinito pode ser entendido em termos do finito foi uma dos grandes triunfos da matemática do século XIX. *Como veremos a seguir, este é precisamante o caminho que vai nos livrar do desconforto de tratar com fatos que envolvam o infinito.*
Observe que a soma dada é um progressão geométrica com infinitos termos. O truque é pensar a progressão com n *termos e depois fazer* n *crescer além de qualquer limite. Assim, vamos encontrar a soma dos* n *termos:*

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^{n-1}. \qquad (*)$$

Para isto, multiplicamos ambos os membros da igualdade $(*)$ *por* q, *obtendo*

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^n. \qquad (**)$$

Agora, fazemos a subtração $(**) - (*)$ *membro a membro, o que nos dá:*

$$qS_n - S_n = (a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^n) \Leftrightarrow$$

$$(q-1)S_n = aq^n - a \Leftrightarrow S_n = \frac{aq^n - a}{q-1} = a \cdot \frac{q^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}$$

Agora, observe que, como $0 < q < 1$, *quando* n *cresce muito, o valor de* q^n *diminui, tendendo para zero. Isto significa que a fração* $\frac{q^n}{q-1}$ *se aproxima de zero, para* n *muito grande.*
Quando n *cresce muito, dizemos que* n *tende ao infinito. Nosso símbolo para infinito é* ∞. *Em símbolos, dizemos que* n *tende ao infinito assim:* $n \to \infty$.
Observe ainda que quando n *tende ao infinito, a parcela* $\frac{a}{q-1}$ *não se altera, pois ela não depende de* n. *Numa linguagem matemática, dizer que o valor de* $\frac{q^n}{q-1}$ *diminui, tendendo para zero, é expresso como:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{q-1} = 0.$$

Portanto, concluímos que o valor da soma dada é igual a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[a \cdot \frac{q^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right] = a \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{q^n}{q-1}\right] - \frac{a}{q-1} = a \cdot 0 + \frac{a}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Observação

Pelo que vimos acima, o valor de cada uma das somas seguintes é:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Capítulo 5

A Noção de Área

5.1 A Definição de Área

A área de uma figura geométrica plana é uma quantidade, expressa por um número positivo, que representa a porção do plano limitada por ela (isto é, uma medida de quanto espaço há sobre o plano, limitado ou definido pelo contorno fechado da figura), satisfazendo as seguintes propriedades:

***Propriedade* 1**

*Figuras **congruentes** [1] possuem a mesma área.*

***Propriedade* 2**

Se uma figura geométrica é dividida em várias partes disjuntas, então o número que expressa a área da figura toda é igual à soma dos números que expressam as áreas das partes (veja ilustração na Figura (1), a seguir).

***Propriedade* 3**

Estabelecemos como unidade de área a que corresponde a área do quadrado unitário, isto é, o quadrado de lado 1. Se a medida do comprimento do lado do quadrado unitário é feita em centímetros, então sua área é igual a $1\ cm^2$. Se a medida do comprimento do lado do quadrado unitário é feita em metros, então sua área é igual a $1\ m^2$, etc.

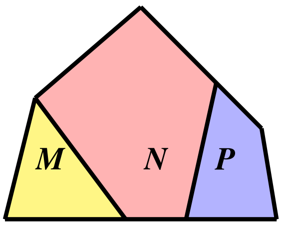


Figura (1)

Observações

*(i) Figuras que possuem áreas iguais são chamadas de **figuras equivalentes**. Assim, figuras geométricas congruentes são equivalentes.*

*Observe que **a recíproca é falsa**, isto é, podemos ter duas figuras geométricas com a mesma área, sem serem figuras congruentes, veja Figura (2), a seguir.*

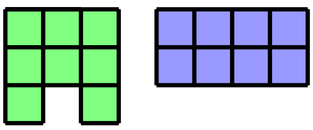


Figura (2)

(ii) Área é uma medida bidimensional.

(iii) A área de uma figura não muda se a figura é movimentada de uma posição à outra no plano, nem se ela for inclinada com relação ao plano.

[1] Duas figuras são ditas **congruentes** se, movendo uma delas, seja possível sobrepor a outra de tal maneira que as duas figuras fiquem identificadas em todas as suas partes

(iv) Duas figuras formam uma nova figura quando partes das duas fronteiras são identificadas e a área da nova figura é a soma das áreas das figuras originais.
(v) O ***valor associado a área*** *de uma figura plana:*

(a) Depende da unidade de área;
(b) Pode ser obtido contando ou aproximando a contagem de quantos quadrados unitário cabem na figura, desenhando, para isso, uma grade feita com quadrados unitários e supondo que a fronteira da figura é uma linha quebrada fechada cujos lados coincidem com os lados da grade.

Em geral, o cálculo da área de uma figura geométrica não é feito contando a quantidade de quadrados unitários na região limitada pela figura, mas indiretamente por meio de medidas de segmentos ou curvas dentro da grade.
Quando for o caso de ter uma quantidade inteira de quadrados unitários na região plana limitada pela figura, o número total dos quadrados unitários dará a exata medida da área, veja Figura (3) a seguir.

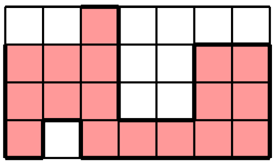


Figura (3)

(c) Depende do comprimento, da largura e configuração da figura;
(d) Pode ser calculada usando uma regra ou fórmula;
(e) Pode ser calculada pela soma das áres de partes menores (como uma soma de Riemann, como é feito na resolução de problemas do Cálculo Integral).
(f) Figuras distintas possuem procedimento diferentes para encontrar suas respectivas áreas. Por exemplo, num retângulo encontramos a área multiplicando-se os comprimento da altura e largura; num triângulo encontramos a área calculando a metade do produto dos comprimentos da altura e base; num círculo multiplicamos o comprimento do quadrado do círculo pelo número π etc.

5.2 A Área de um Retângulo

Teorema 1
A área de um retângulo é o produto de suas dimensões.
Demonstração

O que temos que provar é que o número que expressa a área de um retângulo, em unidades quadradas, é igual ao produto do número que expressa o comprimento da base e altura do

retângulo, ambos expressos na correspondente unidade linear.
Temos três casos a considerar:

1. *Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por números inteiros.*

2. *Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por frações.*

3. *Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por números irracionais (ou somente um deles).*

Caso 1 *- Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por números inteiros.*

Dado um retângulo, veja Figura (A), a seguir, temos que o comprimento da base é b unidades lineares (por exemplo, centímetros, metros etc.) e o comprimento da altura é h nas mesmas unidades lineares.

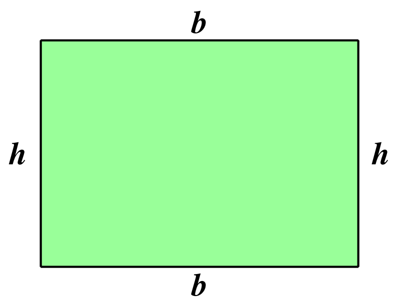


Figura (A)

Agora, dividimos a base em b partes iguais e a altura em h partes iguais. Em seguida, traçamos por estes pontos duas séries de segmentos paralelos respectivamente a altura e a base do retângulo. As interseções mútuas desses segmentos dividem a região limitada pelo retângulo ***em quadrados unitários****, pois, como os segmentos são paralelos aos lados do retângulos, todos os ângulos formados pelas interseções mútuas desses segmentos são retos e, além disso, os segmentos paralelos estão separados por uma unidade, veja Figura (B), a seguir.*

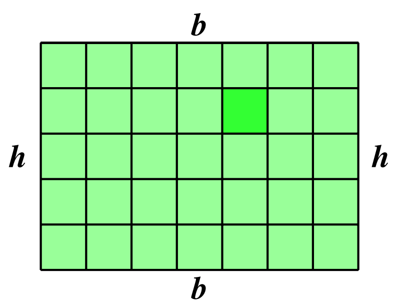


Figura (B)

Assim, a região limitada pelo retângulo fica dividida em quadrados unitários. Agora, precisamos calcular a quantidade deles. É fácil ver que, os segmentos paralelos à base dividem a região limitada pelo retângulo em tantas faixas retangulares quantas são as unidades da altura, isto é, em h faixas congruentes. De maneira análoga, os segmentos paralelos a altura dividem cada faixa em tantos quadrados quantas unidades existem na base b do retângulo, isto é, em b quadrados.
Logo, o total de quadrados é igual a $b \times h$. Portanto, a área do retângulo é igual a $b \cdot h$.

Caso 2 *- Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por frações.*

Suponha que no retângulo temos os comprimentos da

$$base = \frac{m}{n}; \qquad altura = \frac{r}{s}.$$

Neste caso, multiplicamos o numerador e o denominador de cada uma das frações por s e n, respectivamente, obtendo:

$$base = \frac{m}{n} = \frac{m \times s}{n \times s} = \frac{m \cdot s}{n \cdot s};$$

$$altura = \frac{r}{s} = \frac{r \times n}{s \times n} = \frac{r \cdot n}{n \cdot s}.$$

Ou seja, ficamos com duas frações, respectivamente iguais às fraçoes anteriores, mas agora possuindo o mesmo denominador.
Agora, dividimos a base e a altura em $n \cdot s$ partes iguais de modo que a base tenha $m \cdot s$ partes e a altura tenha $r \cdot n$ partes, veja Figura (C), a seguir.

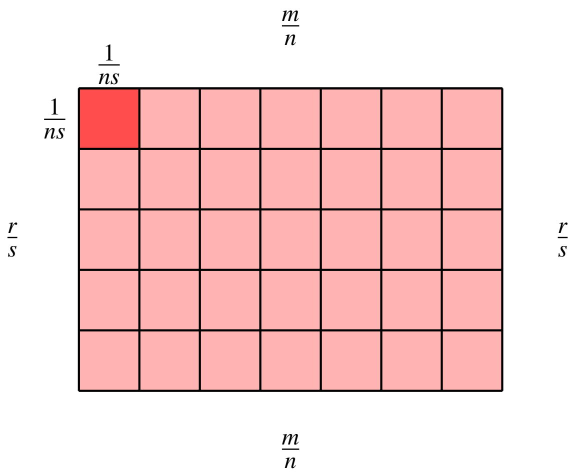


Figura (C)

Assim, como no caso anterior, a região limitada pelo retângulo possui $m\cdot s\times r\cdot n$ *retângulos de dimensões* $\frac{1}{n\cdot s}\times\frac{1}{n\cdot s}$.
Mas, cada um desses retângulos é equivalente a $\dfrac{1}{n\cdot s}\times\dfrac{1}{n\cdot s}$ *da região limitada pelo retângulo todo. Portanto, a área total do retângulo é igual a*

$$(m\cdot s\times r\cdot n)\times\frac{1}{n\cdot s}\times\frac{1}{n\cdot s}=\frac{m}{n}\times\frac{r}{s}$$

Caso 3 *- Os comprimentos da base e altura (medidos na mesma unidade) são expressos por números irracionais (ou somente um deles).*

Aqui será suficiente usar um valor aproximado da área com a precisão que se queira. Neste caso, vamos mostrar que o valor da área também é igual ao produto das dimensões do retângulo.
Seja $ABCD$ *retângulo onde os comprimentos da base* AB *e altura* CD *sejam dois números reais:* α *e* β, *respectivamente.*
Vamos encontrar um valor aproximado de α *e* β *com uma precisão de até* $\frac{1}{n}$.
Para isto, marque sobre a base AB, *a partir do vértice* A, *segmentos de comprimentos iguais a* $\frac{1}{n}$ *da unidade de medida linear, fazendo tantas marcações quantas forem possíveis.. Suponha que seja possível fazer* m *marcações, determinado-se, com isso, um ponto* B' *sobre a base tal que o segmento* AB' *possui comprimento menor do que* AB, *isto é,* $AB'<AB$, *veja Figura (D), a seguir.*

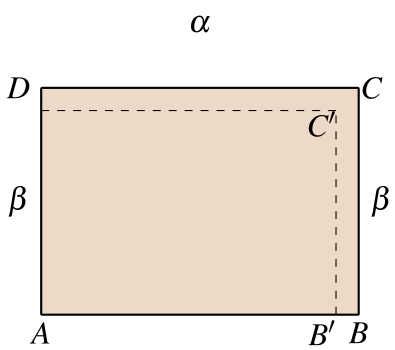


Figura (D)

Agora, fazendo $m+1$ *marcações, vamos obter um segmento* $AB''>AB$, *veja Figura (E), a seguir.*

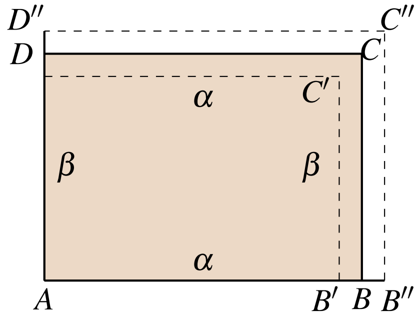


Figura (D)

Assim, as frações $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{m+1}{n}$ *serão aproximações para* α *para cima e para baixo, com a precisão desejada. Além disso, marcamos sobre a base* AD, *a partir do vértice* A, *segmentos de comprimentos iguais a* $\frac{1}{n}$ *da unidade de medida linear, fazendo tantas marcações quantas forem possíveis. Suponha que seja possível fazer* p *marcações, determinado-se, com isso, um ponto* D' *sobre a altura tal que o segmento* AD' *possui comprimento menor do que* AD, *isto é,* $AD' < AD$, *veja Figura (E), acima. Agora, fazendo* $p+1$ *marcações, vamos obter um segmento* $AD'' > AD$, *veja Figura (E), acima.*
Logo, encontramos uma aproximação $\frac{p}{n} < \beta < \frac{p+1}{n}$ *para o comprimento da altura* β.
Construímos dois retângulos $AB'C'D'$ *e* $AB''C''D''$. *As dimensões de cada um desses dois retângulos são expressas por números racionais.*
Portanto, pelo caso 2, a área do retângulos $AB'C'D'$ *é igual a* $fracm+1n \times \frac{p+1}{n}$.
Como o retângulo $ABCD$ *enfeixa o retângulo* $AB'C'D'$ *e é cercado pelo retângulo* $AB''C''D''$, *temos que :*

$$\text{Área (AB'C'D')} < \text{Área (ABCD)} < \text{Área(AB"C"D")} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{m}{n} \times \frac{p}{n} < \text{Área(AB"C"D")} < \frac{m+1}{n} \times \frac{m+1}{n} \times \frac{p+1}{n}$$

As desigualdades acima são verdadeiras para qualquer que seja o valor do número natural n, *isto é, com a precisão que escolhemos para aproximar* α *e* β.
Se tomamos $n = 10$, *depois* $n = 100$, *depois* $n = 1000$ *etc., obteremos frações* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{p}{n}$ *cada vez mais aproximadas dos números* α *e* β, *por baixo e as frações* $\frac{m+1}{n}$ *e* $\frac{p+1}{n}$, *cada vez mais aproximadas dos números* α *e* β, *por cima.*
Não é dificil ver que o produtos delas tornam-se melhores aproximações, por baixo e por cima, da mesma fração decimal infinita, pois tendem a zero quando n *tende para infinito. Esta última fração representa o número real chamado de* ***produto*** *dos números reais* α *e* β.
Portanto, concluímos que área do retângulo $ABCD$ *é igual a* $\alpha \times \beta$.

5.3 A Área de um Paralelogramo

Teorema 2
A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento da base pelo comprimento da

altura.

Demonstração

Seja $ABCD$ um paralelogramo. Sobre a base AD do paralelogramo $ABCD$ construímos o retângulo $AEFD$, com o lado EF estando no prolongamento do lado BC do paralelogramo, veja Figura (F), a seguir.

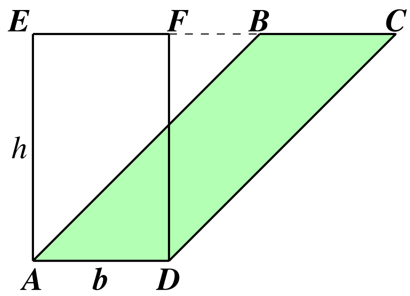


Figura (D)

Agora, juntando o triângulo ΔAEB com o paralelogramo $ABCD$, formamos o trapézio $AECD$. Observe que os triângulos ΔAEB e ΔDFC são congruentes, pelo caso LAL, pois temos: $AE = DF$, $AB = DC$ e $\angle EAB = \angle FDC$, segue que o paralelogramo e o retângulo são ***equivalentes****, isto é, possuem a mesma área. Mas, a área do retângulo $AEFD$ é igual a $b \cdot h$. Portanto, a área do paralelogramo é igual a $b \cdot h$, onde b é o comprimento da base e h é o comprimento da altura do paralelogramo.*

Observação

Se o desenho paralelogramo for tal que o ponto F, usado acima, esteja sobre o lado BC do paralelograma, veja Figura (E), a seguir, o argumento da prova é análogo ao que foi feito acima.

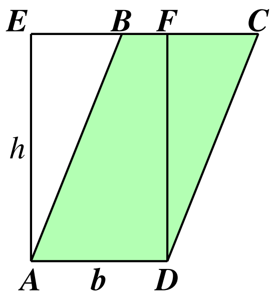


Figura (E)

5.4 A Área de um Triângulo

Lema

Em qualquer triângulo, o produto do comprimento de um lado pelo comprimento da altura correspondente é o mesmo, independentemente do lado escolhido como base.

Demonstração

Seja ABC um triângulo qualquer, no qual as alturas AH e BK correspondem aos lados BC, CA, respectivamente, veja Figura (G), a seguir.

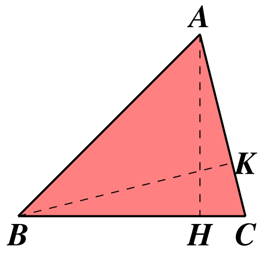


Figura (G)

Os triângulos retângulos ΔACH, ΔBCK possuem o ângulo C em comum. Portanto eles são semelhantes, o que implica

$$\frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BC},$$

o que nos dá $BC \cdot AH = AC \cdot BK$. como queríamos provar.

Teorema 3

A área de um triângulo é igual a metade do produto do comprimento da base pelo comprimento da altura.

Demonstração

*Já provamos no Lema, em qualquer triângulo, o produto do comprimento da base pelo comprimento da altura correspondente é o mesmo, independentemente do lado escolhido como base. Isto significa dizer que esta quantidade é uma **constante** do triângulo. Vamos provar a seguir, que ela representa a área do triângulo.*
Seja ABC um triângulo qualquer.
Traçamos os segmentos BD paralelo à AC e CD paralelo à AB, obtendo um paralelogramo $ABCD$, veja Figura (F), a seguir.

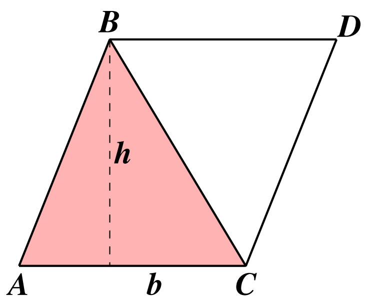


Figura (F)

Mas, a área do paralelogramo é igual ao produto dos comprimentos da base pelo comprimento da altura. Agora, observe que o paralelogramo consiste de dois triângulos congruentes (logo, com áreas iguais), um dos quais é o ΔABC, o que implica :

$$Área(\Delta ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Exemplo 5.4.1 *Prove que: triângulos com bases congruentes e alturas congruentes são equivalentes (i.e. possuem a mesma área)*
Solução

Do exemplo anterior, sabemos que a área de um triângulo é igual a metade do produto do comprimento da base pelo comprimento da altura do triângulo. Assim, dados dois triângulos com bases congruentes e alturas congruentes, tem-se que suas bases e suas alturas possuem o mesmo comprimento. Portantos suas áreas são iguais. Um exemplo de uma situação assim é, dado um triângulo ΔABC, se movemos o vértice B ao logo da reta paralela à reta determinada pelos vértices A e C, deixando a base inalterada, então a área de todos esses triângulos são constantes e iguais a área do ΔABC, veja Figura (H), a seguir.

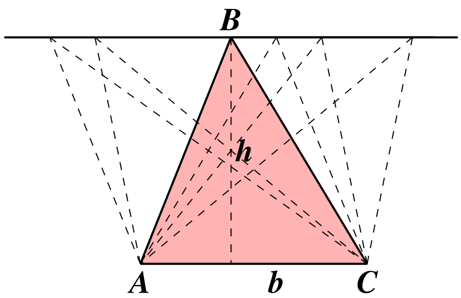


Figura (H)

Exemplo 5.4.2 *Prove que: a área de um triângulo retângulo é igual a metade do produto dos comprimentos dos catetos*
Solução

Isto decorre do fato de que os catetos são perpendiculares, e usamos um dos catetos como base e o outro como a altura do triângulo, veja Figura(I), a seguir.

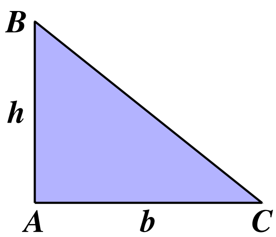


Figura (I)

5.5 A Fórmula de Heron

Teorema 4
Dados os números positivos $a,\ b\ ,\ c$ *como sendo os comprimentos dos lados de um triângulo* $\Delta ABC,$ *então a área do triângulo é dada por:*

$$Área(\Delta ABC) = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

onde s *é o semi-perimetro.*
Demonstração

Sejam ABC *um triângulos qualquer, onde as medidas dos comprimentos dos lados sejam* $BC = a,\ AC = b$ *e* $AB = c,$ *e* h_c *seja o comprimento da altura relativa ao lado* $BC,$ *veja Figura (J), a seguir.*

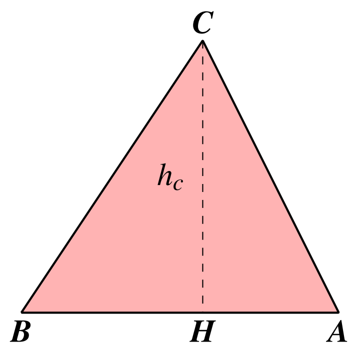


Figura (J)

Chamando de $2s$ *o perímetro do triângulo, isto é, a soma dos comprimentos dos três lados, temos que:*

$$2s = a+b+c \qquad (*)$$

De $(*)$ *podemos concluir que*

$$s = \frac{a+b+c}{2}; \qquad (**)$$

$$2s = a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2s-2a = -2a+a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2(s-a) = -a+b+c \qquad (***)$$

$$2s = a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2s-2b = -2b+a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2(s-b) = a-b+c \qquad (****)$$

$$2s = a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2s-2c = -2c+a+b+c \ \Leftrightarrow\ 2(s-c) = a+b-c \qquad (*****)$$

Sabemos que a área do triângulo pode ser expressa como:

$$Área(\Delta ABC) = \frac{1}{2}c\cdot h_c$$

Vamos chamar os comprimento $AH = n$ *e* $BH = m,$ *onde* $m+n = c.$
Usando o Teorema de Pitágoras para os triângulos retângulos ΔBCH *e* $\Delta ACH,$ *temos :*

$$a^2 = h_c^2 + m^2 \quad (******) \qquad b^2 = h_c^2 + n^2 \quad (*******)$$

Como $n = c - m$, *temos que*

$$n^2 = (c-m)^2 = c^2 - 2cm + m^2 \Leftrightarrow n^2 + h_c^2 = h_c^2 + c^2 - 2cm + m^2$$

Por $(******)$ *e* $(*******)$, *a última igualdade obtida pode ser reescrita como*

$$b^2 = h_c^2 + c^2 - 2cm + m^2 = a^2 + c^2 - 2cm.$$

Explicitando o valor de m, *temos:*

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Usando o Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo ΔBCH, *temos:*

$$h_c^2 + m^2 = a^2 \Leftrightarrow h_c^2 = a^2 - m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_c^2 = (a+m)(a-m) = \Big(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\Big) \cdot \Big(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\Big) =$$

$$= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2) \cdot (2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4c^2} = \frac{[(a+c)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a-c)^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+a-c). \cdot (b-a+c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}{4c^2} \Leftrightarrow$$

$$h_c^2 = \frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}{4c^2}$$

Agora, substituindo $(***)$, $(****)$ *e* $(*****)$ *na última igualdade, temos:*

$$h_c^2 = \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4c^2} = \frac{16s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{4c^2} \Rightarrow$$

$$h_c^2 = \frac{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{c^2} \Rightarrow h_c = \frac{2\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{c}.$$

Como

$$\acute{A}rea(\Delta ABC) = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot \Big(\frac{2\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{c}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\acute{A}rea(\Delta ABC) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Exemplo 5.5.1 *Prove que: dentre todos os triângulo de um dado perímetro, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.*
Solução

Seja ΔABC *um triângulo qualquer cujo perímetro,* $2s = a+b+c$, *seja igual a uma constante. Isto significa que o semi-perímetro,* $s = \frac{a+b+c}{2}$, *também é uma constante.*
Do exemplo anterior, temos que a área do triângulo é dada por

$$A = \acute{A}rea(\Delta ABC) = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \Leftrightarrow A^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$$

Observe que, a área, A, *é máxima implica que* A^2 *será máxima. Agora, como* s *é constante, segue que* A^2 *será máxima se* $\frac{A^2}{s} = (s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$ *for máximo.*
Por outro lado, observe que a soma dos fatores $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ *é igual a*

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s.$$

Logo, a soma dos fatores é uma constante. Agora empregamos o teorema da desigualdade entre Média Artimética e Média Geométrica, veja no Apêndice A, para o caso $n = 3$:

$$\frac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw} \qquad (\alpha)$$

com a igualdade sendo verdadeira se, e somente se $u = v = w$.
Aqui tomamos:

$$u = s-a; \quad v = s-b; \quad w = s-c.$$

Aplicando (α), *temos:*

$$\frac{s}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \Rightarrow \frac{s^3}{27} \geq (s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) = \frac{A^2}{s} \Leftrightarrow$$

$$A^2 \leq \frac{s^4}{27},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $(s-a) = (s-b) = (s-c)$. *Isto é, para* $a = b = c$.
Portanto, dentre todos os triângulo de um dado perímetro, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.
Observação

Pelo visto acima, a área, A, *de um triângulo com perímetro* $2s$ *satisfaz:*

$$A^2 \leq \frac{s^4}{27} \Rightarrow A \leq \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{s^2}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim, o maior valor possível para a área de um triângulo com perímetro $2s$ *é igual a* $\frac{s^2}{3^{\frac{3}{2}}}$.
É fácil ver que, a área é exatamente igual a $\frac{s^2}{3^{\frac{3}{2}}}$ *para os triângulos equiláteros cujos lados possuem comprimentos iguais a:*

$$\frac{s}{3}; \quad \frac{2s}{3}; \quad \frac{3s}{2} \quad e \quad \frac{1}{3}.$$

Nota *O problema do exemplo* 3.1.8 *admite uma formulação equivalente:*
Dentre todos os triângulos com uma área dada, o triângulo equilátero é o que possui o menor perímetro.
Este tipo de problem é chamado ***problema isoperimétrico*** *e tem origem muito antiga. Na obra* ***Eneida****, o poeta romano clássico Virgílio* [2]*, na sua famosa obra de literatura latina chamada* ***Eneida****, apresenta um problema de encontar uma curva fechada simples com um perímetro fixo, que engloba maior área.*
Conta Virgílio, na sua obra Eneida, que a filha do rei Tiro, a princesa Dido (Elisa), depois que seu marido foi assassinado pelo seu irmão, consegue fugir com alguns amigos e partidários, levando consigo as riquezas do marido. Chegando a Costa do Mediterrâneo, norte da África, Dido resolve ficar e formar sua nova pátria. Ela negocia com o Rei Jarbas a compra de terras e ficou acertado que poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de um único touro. O pedido é aceito e seria um péssimo negócio, não fosse a astúcia de Dido, que cortou a pele em tiras finíssimas, que envolveram uma parte de terra muito maior que a esperada pelos vendedores. Ali, a Rainha fundou Qart Hadsht, Cidade Nova para os fenícios, Cartago para a história, na região correspondente o que é hoje a cidade de Tunis, capital da Tunísia. A astúcia de Dido foi mandar cortar o couro de um touro em estreitas tiras com o qual cercou uma imensa área de forma circular onde construiu a cidade com o nome de Birsa (couro). Em torno dessa cidade começa a se formar outra, Cartago, que logo se torna próspera. O quadro a seguir, uma gravura de Mathias Merian, Frankfurt, 1630*, retrata a compra de terras por Dido para a fundação da cidade de Cartago.*

[2]Públio Virgílio Maro ou Marão (em latim: Publius Vergilius Maro; $(70a.C. - 19a.C.)$ foi um poeta romano clássico, autor de três grandes obras da literatura latina, as Éclogas (ou Bucólicas), as Geórgicas, e a Eneida. Virgílio é tradicionalmente considerado um dos maiores poetas de Roma, e expoente da literatura latina. Sua obra mais conhecida, a Eneida, é considerada o épico nacional da antiga Roma: conta a história de Enéias, refugiado de Troia, que cumpre o seu destino chegando às margens de Itália -na mitologia romana, o ato de fundação de Roma. A obra de Virgílio foi uma vigorosa expressão das tradições de uma nação que urgia pela afirmação histórica, saída de um período turbulento de cerca de dez anos, durante os quais as revoluções prevaleceram. Virgílio teve uma influência ampla e profunda na literatura ocidental, mais notavelmente na Divina Comédia escrita por Dante Alighieri, no século XIV (e dividida em três partes: Inferno Purgatório Paraíso) em que Virgílio aparece como guia de Dante pelo inferno e purgatório.

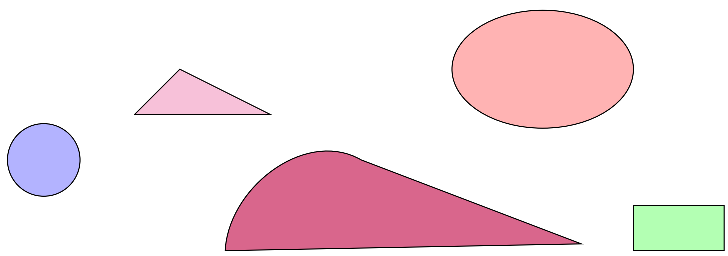
Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Esta história de fundação de Cartago ficou conhecida com o nome de "Problema de Dido", que se resume naquilo que passou a ser conhecido por ***desigualdade isoperimétrica****, que pode ser enunciada da seguinte forma:*

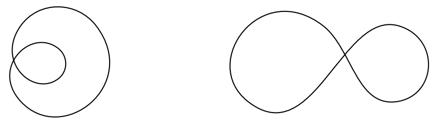
"Dada uma curva simples fechada de comprimento finito, qual é a forma que esta curva deve ter para que a sua área seja máxima?"

Um dos fatores que contribuíram para o sucesso de tal lenda, foi a forma usada de um círculo que, natural e intuitivamente, é a forma plana que apresenta a maior razão área por perímetro, fato já conhecido desde a Grécia antiga, mas de difícil demonstração. A demonstração foi dada somente em 1870, pelo matemático alemão Karl Weiertrass, usando o Cálculo das Variações.

Um curva simples é aquela sem autointerseção. A seguir, exemplos de curvas simples fechadas limitando uma área.



As Figuras planas mostradas a seguir não curvas são simples, pois tem autointerseção:



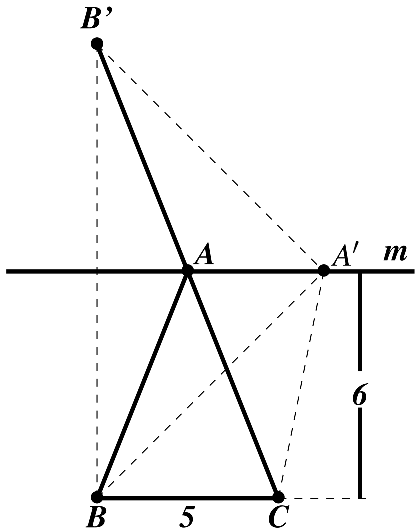
Exemplo 5.5.2 *Um triângulo possui uma base medindo* $5\,cm$ *e a área igual a* $15\,cm^2$. *Sabendo-se que o perímetro do triângulo é o menor possível, encontre os comprimentos dos dois outros lados.*

Solução

Sejam ABC *o triângulo, com* BC *a base:* $BC = 5\,cm$. *O problema é identificar a posição do vértice* A *de modo que o triângulo* ABC *tenha perímetro o menor possível.*
A área do triângulo é dada por

$$15 = \frac{1}{2} \cdot b. \cdot h = \frac{1}{2} \times 5 \times h \;\Rightarrow\; h = \frac{30}{5} = 6\,cm.$$

Portanto, o vértice A *está sobre uma reta* m, *paralela à reta que contém os pontos* B *e* C *e dela distando* $6\,cm$, *veja Figura a seguir.*



Seja B' *o reflexo do ponto* B *com relação à reta* m. *Agora, ligue o ponto* B' *ao ponto* C.
A interseção do segmento $B'C$ *com a reta* m *é o ponto* A *procurado.*
De fato, para qualquer outro ponto A' *sobre a reta* m, *o perímetro do* $\Delta A'BC$ *satisfaz:*

$$BC + A'B + A'C = BC + A'B' + A'C \geq (BC + \textit{comprimento do segmento } B'C) = \textit{Perímetro do } \Delta ABC.$$

Por outro lado, é fácil ver que $AB = AC$, *pois o segmento* BB' *é perpendicular à reta* m *e por ela é dividido ao meio. Portanto, o* ΔABC *é isósceles e, usando o Teorema de Pitágoras, é fácil ver que os outros dois lados possuem o mesmo comprimento igual a*

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}.$$

5.6 A Área do Losango

Teorema 5
A área do losango (ou rombo) é igual a metade do produto dos comprimentos das diagonais.
Demonstração

Seja $ABCD$ um losango. Temos que as diagonais do losango são perpendiculares, veja Figura (J), a seguir.

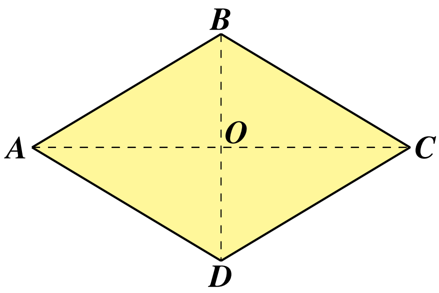


Figura (J)

Assim, temos que:

$$Área(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB \quad (*); \qquad Área(\Delta ADC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OD \quad (**)$$

Agora, somando $(*)+(**)$, temos

$$Área(ABCD) = Área(\Delta ABC) + Área(\Delta ADC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD.$$

5.7 A Área de um Trapézio

Teorema 6
A área de um trapézio é igual ao produto do comprimento da altura pela metade da soma dos comprimentos das bases
Solução
Seja $ABCD$ um trapézio. Traçando a diagonal AC, veja a Figura (K), a seguir,

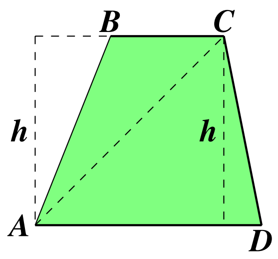


Figura (K)

podemos escrever a área do trapézio como a soma das áreas dos triângulos ΔACD *e* ΔBAC*. Assim, temos:*

$$Área(ABCD) = \frac{1}{2}AD \cdot h + \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h.$$

Exemplo 5.7.1 *Sejam* $ABCD$ *é um trapézio e* MN *o meio do trapézio. Prove que a área do trapézio é dada pelo produto do comprimento do segmento* MN *pela altura:*

$$Área(ABCD) = MN \cdot h$$

Solução

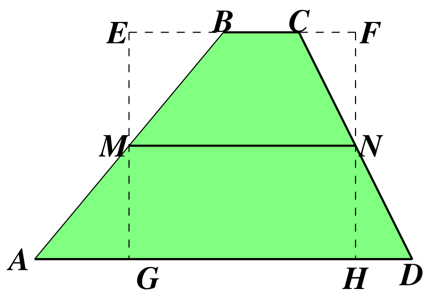


Figura (L)

Basta observar que: $h = EG$*;* $EF = MN = GH$*,* ΔAGM *é congruente ao* ΔBEM *e* ΔCFM *é congruente ao* ΔDHM*, que implica*

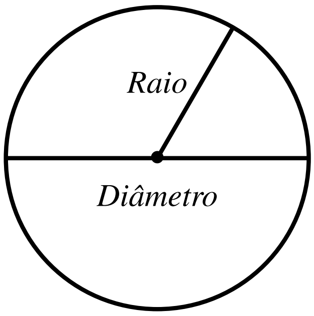
$$Área(ABCD) = Área(EFHG) = MN \cdot h.$$

5.8 A Área do Círculo

*O **círculo** é uma das mais belas, simples e elegantes figuras geométricas planas.*

*Por definição, o **círculo** é uma figura plana na qual todos os seus pontos estão a uma **mesma distância** de um **ponto fixo**, chamado **centro** do círculo.*

*A distância comum de todos os pontos do círculo ao centro é chamada de **raio**. Os segmentos de maior comprimento que unem dois pontos sobre o círculo é chamado de **diâmetro** (que mede duas vezes o raio) e passam, necessariamente, pelo centro. A medida de um diâmetro é igual a duas vezes a medida do raio.*
*Todos os círculos possuem a mesma forma, o que significa dizer que dois círculos quaisquer são **semelhantes** [3]. Observe que esta é uma qualidade interessante do círculo, o que não acontece, por exemplo, com todos os triângulos, nem com todos os retângulos, pois nem todos os triângulo (ou retângulos) são semelhantes.*

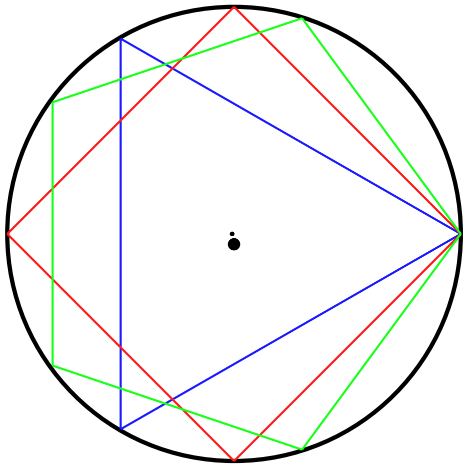


*O comprimento do círculo, que é a distância percorrida ao longo da curva circular fazendo um circuito completo, é chamado de **circunferência**.*
*O círculo possui outra **propriedade notável**: o quociente entre a circunferência e o diâmetro é o mesmo para todo círculo, pequeno (com circunferência pequena), médio (com circunferência média) ou grande (com circunferência grande). Chamamos esta constante de π, isto é, se C é a circunferência e D é o diâmetro do círculo, por definição, $\frac{C}{D} = \pi$, ou ainda $C = D \cdot \pi$.*

Pergunta: Como calcular a área de um círculo?

*A idéia é aproximar a área do círculo pela área de polígonos regulares nele **inscritos**, fazendo a quantidade de lados crescer além de qualquer limite, veja Figura a seguir.*

[3]**Figuras semelhantes** - Duas figuras planas F *e* F' são semelhantes quando existe uma correspondência bijetiva $\varphi : F \longrightarrow F'$ entre os pontos de F *e* F' com a seguinte propriedade: se X, Y são pontos de F e $X' = \varphi(X)$ *e* $Y' = \varphi(Y)$ são seus correspondentes em F', então os comprimentos do segmento XY *e* $X'Y'$ satisfazem: $X'Y' = r \cdot XY$, onde r é uma constante real positiva. Por exemplo, duas fotografias impressas em tamanhos diferentes produzem exemplos de figuras semelhantes.

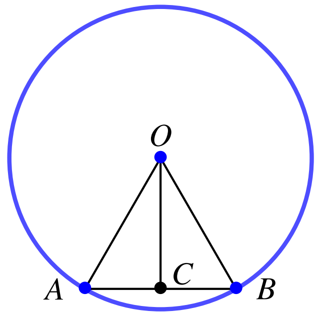


Dado um círculo de raio r, inscreva nele um quadrado (polígono que possui 4 *lados).*
Comparando a área do quadrado com a do círculo no qual ele está inscrito, ainda falta muito para que as duas áreas sejam consideradas iguais.
Em seguida, inscreva um octógono regular (polígono que possui 8 *lados). É fácil ver que a região ocupada pelo octógono ocupa uma área maior do que a do quadrado, porém, ainda longe de ser igual a área do círculo no qual ele está inscrito.*
Depois inscreva um polígono regular com 16 *lados, e assim por diante. Isto é, inscreve-se no círculo polígonos regulares onde a cada vez o número de lados é dobrado:* $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36, \cdots$.

É fácil ver que quando a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo vai aumentando (no caso, dobrando), a área da região por ele limitada vai se aproximando da área do círculo.

Seja n *a quantidade de lados do polígono regular inscrito no círculo de raio* r *e seja* p *seu perímetro. O comprimento de um de seus lados é expresso pelo quociente* $\frac{p}{n}$. *Dobrando uma quantidade de vezes ilimitada o número de lados do polígono regular inscrito no círculo, o denominador da fração* $\frac{p}{n}$ *cresce muito, enquanto o número* p *cresce, porém não cresce indefinidamente, pois é ser menor que o perímetro de um polígono regular* ***circunscrito*** *ao círculo de raio* r.
Agora, observe que a razão cujo numerador é limitado e o denominador cresce indefinitivamente, tende a zero. Isto significa dizer que o comprimento do lado do polígono inscrito decresce indefinitivamente quando n *cresce além de qualquer limite.*
Agora, seja AB *o lado de um polígono regular inscrito num círculo de centro* O *e raio* r. *Assim, o comprimento do segmento* OA *é igual ao raio e* OC *é o* ***apótema*** [4], *veja Figura a seguir.*

[4]**Apótema** de um polígono regular é a designação dada ao segmento de reta que partindo do centro geométrico da figura é perpendicular a um dos seus lados. O apótema é o raio do círculo inscrito no polígono regular



Considerando a desigualdade triangular para o triângulo ΔAOC, temos:

$$OA < OC + AC \Leftrightarrow AO - OC < AC = \frac{AB}{2}.$$

Portanto, $OA - OC < \frac{AB}{2}$.
Como o lado do polígono decresce indefinidamente quando dobramos cada vez a quantidade de lados, significa que o apótema tende ao raio.
Sejam S *a área de um polígono inscrito num círculo de raio* r, *e* s *o semi-perímetro do polígono e* ρ *o comprimento do apótema, É fácil ver que:*

$$S = s \cdot \rho$$

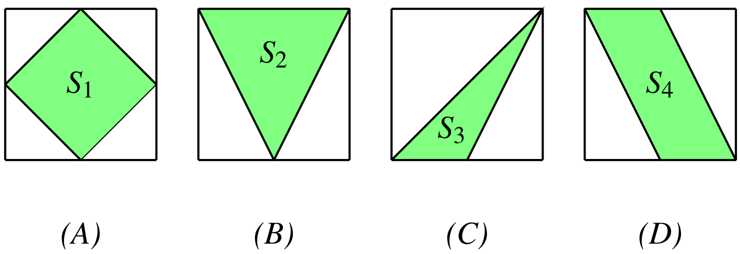
Agora, imagine que o número de lados do polígono seja dobrado indefinidamente. Neste caso, o semi-perímetro s, *o comprimento do apótema e a área* S *crescerão. O semi-perímetro tenderá para a metade do comprimento do círculo e o comprimento do apótema,* ρ, *tenderá para o raio,* r. *Portanto, a área do polígono tenderá para*

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{comprimento do círculo}) \cdot r$$

O limite para o qual a área do polígono regular inscrito num dado círculo de raio r *tende quando o número de lados do polígono é dobrado indefinitivamente é* ***definido como a área do círculo****.*
Chamando a área do círculo de A, *temos que*

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\text{comprimento do círculo}) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot r) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

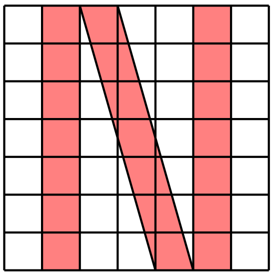
Exemplo 5.8.1 *Na Figura a seguir, temos quatro quadrados congruentes, com lado medindo* 1, *e nos quais estão marcados os pontos médios dos lados.*



Escreva os números S_1, S_2, S_3, S_4 em ordem crescente.
Solução

Temos que a área colorida da figura A possui área $S_1 = 1 - 4 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
A área colorida da figura B possui área $S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.
A área colorida da figura C possui área $S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$.
A área colorida da figura D possui área $S_4 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.
Portanto, temos: $S_3 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = S_1 = S_2 = S_4$.

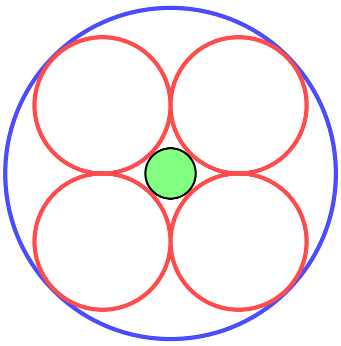
Exemplo 5.8.2 *Na Figura a seguir, todos os quadradinhos são congruentes e possuem lado de comprimento* 1 *cm.*



*Qual é a área da letra **N**?*
Solução

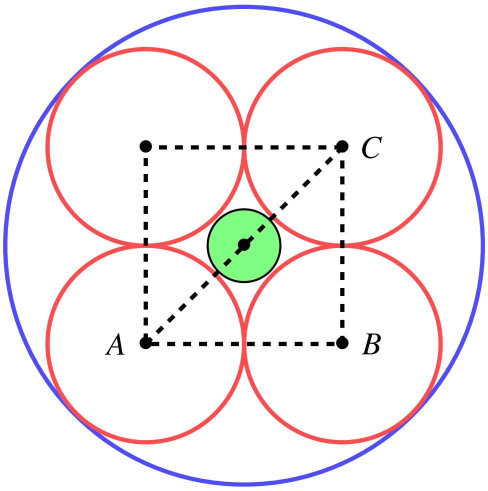
*Observe que a letra **N** está toda desenhada dentro de um retângulo* 5×7. *Além disso, podemos juntar os dois triângulos que se formam "**dentro**" da letra **N** para formar um retângulo* 2×7. *Portanto, a área da letra **N** é dada por:* $(5 \times 7) - (2 \times 7) = 35 - 14 = 21\ cm^2$.

Exemplo 5.8.3 *A Figura a seguir mostra* 4 *círculos de raios iguais a* 1, *tangentes entre si, desenhados na região limitada por um círculo maior, cada um deles tangente ao círculo maior, e um círculo de raio menor, tangente aos quatro círculos.*



Qual é a área do círculo menor (região pintada de verde)?
Solução

Para encontrar a área do círculo menor, temos que achar o seu raio. Para isso, unimos os centros dos 4 *círculos de raio* 1, *formando um quadrado de lado com comprimento* 2, *veja Figura a seguir.*



Sejam r *o raio do círculo menor, que queremos encontrar. Aplicando o Teorema de Pitágoras para* $\Delta ABC,$ *obtemos*

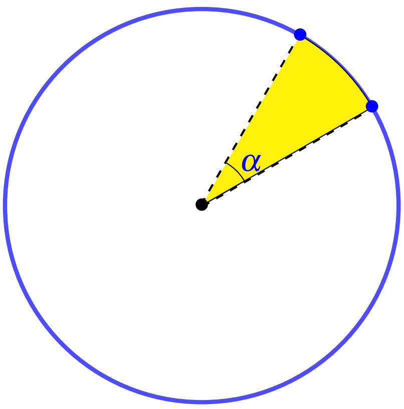
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff (1+2r+1)^2 = (1+1)^2 + (1+1)^2 \iff (2+2r)^2 = 4+4 \iff$$

$$4+8r+4r^2 = 8 \iff 4r^2+8r-4 = 0 \iff r^2+2r-1 = 0 \Longrightarrow r = \frac{-2+\sqrt{4+4}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Portanto, a área pedida é igual a

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (-1+\sqrt{2})^2 = \pi \cdot (1+2-2\sqrt{2}) = \pi \cdot (3-2\sqrt{2}).$$

Exemplo 5.8.4 *Comí um pedaço de pizza que representa* 15% *da pizza, como indica a figura a seguir.*



Qual é o valor do ângulo α*?*

Solução

Vamos supor que o raio do disco da pizza seja igual a r*. A área do disco da pizza toda é a área do círculo de raio* r*, isto é:* $S = \pi \cdot r^2$.

Como círculo é uma figura fechada, começando de algum ponto, podemos percorrer um ângulo de $2\cdot\pi$ *radianos fazendo o um circuito completo. Isto significa que a área ocupada por um pedaço cujo ângulo é* 1 *radiano (i.e. um setor circular de ângulo igual a* 1 *radiano) é dada por:*

$$S_{1rd} = \frac{\pi\cdot}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{r^2}{2}.$$

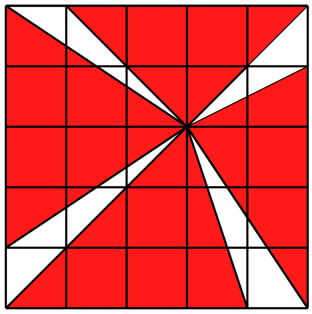
Portanto, a área de um setor circular de ângulo α *é igual a:*

$$S_\alpha = \frac{r^2}{2}\times\alpha.$$

Assim, pela hipótese do problema, temos que:

$$\frac{r^2}{2}\times\alpha = \frac{15}{100}\times\pi\cdot r^2 \implies \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{20}\cdot\pi \implies \alpha = \frac{3\cdot\pi}{10} = 54^o.$$

Exemplo 5.8.5 *Na Figura a seguir, desenhada sobre um tabuleiro* 5×5*, qual é a razão entre a área* ***não*** *pintada e a área pintada?*



Solução

Basta observar que, para calcular a área dos triângulos não pintados, podemos considerar a medida da base como sendo a medida, 1*, do comprimento do lado de cada casa do tabuleiro. Assim, a soma das áreas dos triângulos não pintados é dada por:*

$$S_{np} = \frac{1}{2}\cdot(1\times 2) + \frac{1}{2}\cdot(1\times 2) + \frac{1}{2}\cdot(1\times 3) + \frac{1}{2}\cdot(1\times 3) = 5.$$

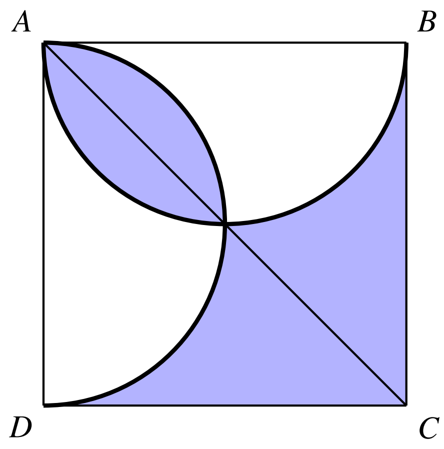
Agora, a área da região pintada é igual a

$$S_p = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20.$$

Portanto, a razão pedida é igual a

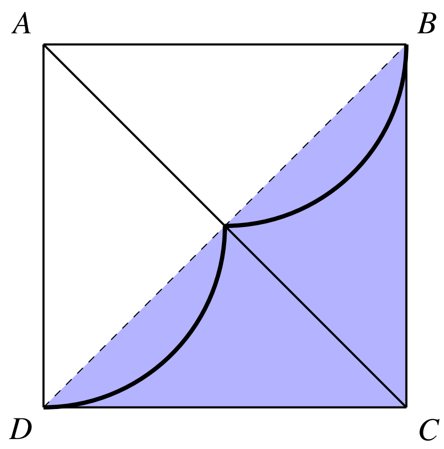
$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 5.8.6 *Na Figura a seguir, o quadrilátero* $ABCD$ *é um quadrado com lado medindo* 2 *e os dois semicírculos possuem* AB *e* AD *como diâmetro.*



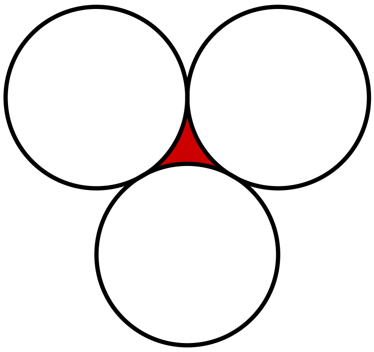
Qual é a área da região colorida?
Solução

Observe que os dois semi-círculos, de diâmetros AB e AD, respectivamente, se intersectam no centro do quadrado. Assim, dividindo a pétala ao meio (pela diagonal AC) é fácil ver que as metades delas podem se unir a outra parate colorida da figura para formar a região limitada pelo ΔBDC, veja Figura a seguir.



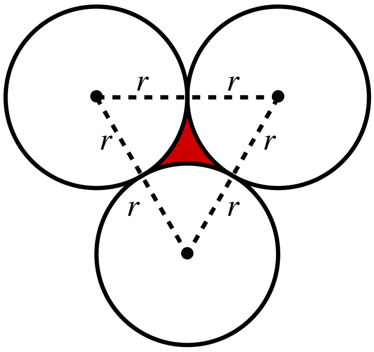
Portanto, a área pedida é igual a área do ΔBCD: $\frac{1}{2}(2 \times 2) = 2$.

Exemplo 5.8.7 *São dados três círculos de mesmo raio r, mutuamente tangentes, veja Figura a seguir.*



Encontre a área da região pintada de vermelho.
Solução

Unindo os três centros dos círculos, formamos um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento $2r$*, veja Figura a seguir.*



Usando teroema de Pitágoras, é fácil ver que a altura de um triângulo equilátero é igual a

$$h = (comprimento\ do\ lado) \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

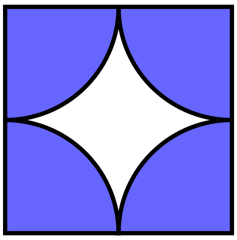
Assim, a área do triângulo é igual a

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot b.h = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r^2 \cdot \sqrt{3}.$$

Portanto, a área pedida, S, é igual a área do triângulo menos três vezes a área do setor circular cujo ângulo é $\frac{\pi}{3}$*:*

$$S = A_\Delta - S_{\frac{\pi}{3}} = r^2 \cdot \sqrt{3} - 3\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplo 5.8.8 *Um piso retangular de* $8\ m \times 10\ m$ *está coberto por mosaicos quadrados de dimensões* $50\ cm \times 50\ cm$ *como na Figura a seguir.*



Qual é a área do piso pintada de branco?
Solução

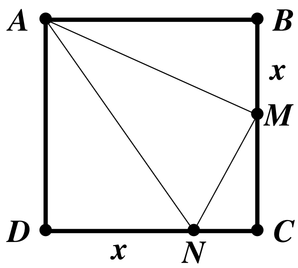
Os raios dos círculos de cada mosaico medem 25 *cm. Observe que, juntando os* 4 *quartos de círculo de cada um dos mosaicos, cobriremos uma área equivalente a de um círculo de raio* 25 *cm. Logo, em cada mosaico a área branca é igual a área do quadrado menos a área do círculo. Portanto, é igual a*

$$50^2 - \pi \cdot 25^2 = 625(4-\pi)\ cm^2.$$

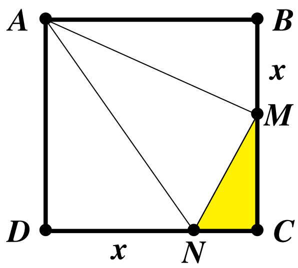
Como o piso tem $80\ m^2 = 800.000\ cm^2$ *e cada mosaico cobre uma superfície de* $2.500\ cm^2$, *será necessário um total de* $\frac{800.000}{2.500} = 320$ *mosaicos para cobrir todo o piso. Portanto, o total da superfície branca é igual a*

$$320 \cdot [625 \cdot (4-\pi)] = 200.000 \cdot (4-\pi)\ cm^2.$$

Exemplo 5.8.9 *Carlos tem um quadrado de papel de lado* 1.
(i) Ele quer dividir a região limitada pelo quadrado em 3 *partes, como mostra a Figura a seguir.*



Se as trê spartes devem ter a mesma área, quanto deve medir x*?*
(ii) Agora ele quer dividir a região limitada pelo quadrado em quatro partes, de forma que os três triângulos que não estão coloridos tenham a mesma área, veja Figura a seguir.



Quanto deve medir x?
Solução

(i) Os dois triângulos retângulos possuem a mesma altura e a mesma base, o que implica que tem áreas iguais a

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot x\cdot 1 = \frac{x}{2}.$$

Assim, a área do losango $AMCN$ é igual a

$$S_L = 1 - 2\times\frac{x}{2} = 1 - x.$$

Como as três áreas são iguais, temos que

$$1 - x = \frac{x}{2} \iff 2 - 2x = x \iff x = \frac{2}{3}.$$

(ii) A área dos triângulos retângulos congruentes é igual a $\frac{x}{2}$, a área do triângulo colorido é igual $\frac{(1-x)^2}{2}$ e a área do outro triângulo é igual a

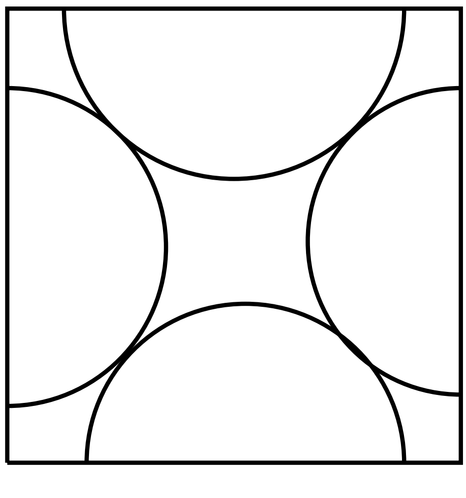
$$1 - \frac{(1-x)^2}{2} - 2\cdot\frac{x}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2 - 2x}{2} = 1 - \frac{1+x^2}{2} = \frac{1+x^2}{2}.$$

Assim, pela hipótese, temos que:

$$\frac{x}{2} = \frac{1+x^2}{2} \iff x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Como $x > 0$, segue que $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

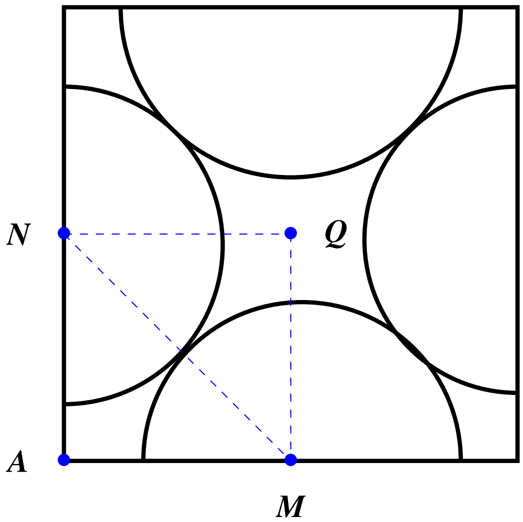
Exemplo 5.8.10 *Na Figura a seguir, temos quatro semicírculos tangentes, de raio 1, com centros nos pontos médios dos lados de um quadrado.*



Qual é a área do quadrado?

Solução

Sejam A *um dos vértices do quadrado,* M *e* N *os respectivos pontos médios de dois lados adjacentes e* Q *o centro do quadrado, veja Figura a seguir.*



Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$AM^2 + AN^2 = MN^2 = (1+1)^2 = 4.$$

Por outro lado, o segmento MN *é a diagonal do quadrado* $AMQN$*, que pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no* ΔAMN*, temos*

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + AM^2 = 2AM^2 \Longrightarrow MN = AN \cdot \sqrt{2}.$$

Como $MN^2 = 4$*, temos*

$$2 \cdot AM^2 = MN^2 = 4 = 2^2 \Longrightarrow AM = \sqrt{2}.$$

Portanto, o lado do quadrado é igual a $2 \cdot AM = 2 \cdot \sqrt{2}$*, o que implica a área do quadrado igual a* $(2 \cdot \sqrt{2}^2) = 8\ cm^2$*.*

Capítulo 6

Definição de Logaritmo

A palavra ***logaritmo*** *vem de duas palavras gregas: logos (razão) e arithmos (número).*
O que motivou a criação dos logaritmos foi a necessidade de simplificação dos cálculos aritméticos. Quem teve a idéia foi o matemático, astrônomo e teólogo escocês John Napier (1550-1617), que teve seu invento divulgado em 1614, através de seu livro ***Mirifici logarithmorum canonis descripitio*** *(em latim, era comum na época escrever artigos científicos em latim).*
Hoje em dia, quando queremos fazer cálculos, simplesmente apertamos os botões de uma calculadora ou teclado de um computador. No século XVII não havia calculadoras ou computadores. Por isso, a descoberta de Napier causou grande impacto na comunidade científica da época. A idéia de Napier consistia na utilização de expoentes em operações que envolviam a multiplicação e a divisão de números muito grandes, reduzindo-as para a adição ou subtração de expoentes.
Napier construiu um sistema de logaritmos constituído por uma tabela com duas colunas que associava a cada número positivo x, na primeira coluna, um número L(x) - designado por logaritmo de x -na segunda coluna.
Neste capítulo daremos uma definição de logarítmo, estabeleceremos sua propriedades básicas e resolvemos muitos problemas que favorecem a aplicação das propriedades básicas. Isso vai nos permitir conhecer as idéias de Napier e também entender que quando fazemos cálculos com uma calculadora ou computador estão implícitos uma longa cadeia de conceitos e raciocíonios matemáticos.
Como é usual, denotaremos por $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais e por* $\mathbb{R}^+$ *o conjunto dos números reais positivos.*
Uma função

$$L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

chama-se uma ***função logaritmica*** *ou* ***um sistem de logaritmos*** *se L possui as duas propriedades seguintes:*

- ***Propriedade A***
  A função L é crescente, isto é, satisfaz: $x < y \Longrightarrow L(x) < L(y)$.
- ***Propriedade B***
  $L(x+y) = L(x) \times L(y)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, *o número real* $L(x)$ *chama-se* ***o logaritmo de x***.
Vamos mostrar a seguir as propriedades básicas das funções logarítmicas, decorrentes das propriedades A e B acima, e concluir que, uma vez definido o sistema de logaritmo L, só existe uma maneira de alterar esse sistema de logaritmo para outro: multiplicar por uma mesma constante todos os logaritmos desse sistema.

Propriedades Básicas das Funções Logaritmicas

- *(i) Uma função logarítmica é sempre injetiva, isto é, se* $x \neq y$ *então* $L(x) \neq L(y)$.
- *(ii) L(1) = 0.*

- *(iii) Os números reais maiores do que* 1 *possuem* $L(x)$ *positivo, e os números reais* x *satisfazendo* $0 < x < 1$, *posuem* $L(x)$ *negativo.*
- *(iv) Para todo número real positivo* x*, temos* $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.
- *(v) Para todos números reais postivos* x, y*, tem-se:* $L\left(\dfrac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.
- *(vi) Para todo número real positivo* x *e para todo número racional* $r = \frac{p}{q}$ *tem-se:* $L(x^r) = r \times L(x)$.
- *(vii) Uma função logarítmica é* ***ilimitada*** *superior e inferiormente.*

Demonstração

(i) Se x, y*, são números reais positvos distintos, temos: ou* $x < y$ *ou* $y < x$.
Se $x < y$*, pela Propriedade A, temos que* $L(x) < L(y)$*, o que implica que* $L(x) \neq L(y)$.
Se $y < x$*, pela Propriedade A, temos que* $L(y) < L(x)$*, o que implica que* $L(y) \neq L(x)$.
Em qualquer uma das hipóteses possíveis, temos que: $x \neq y \Longrightarrow L(x) \neq L(y)$.

(ii) Temos que: $L(1) = L(1 \times 1) = L(1) + L(1)$*, pela Propriedade B. Como:* $L(1) = L(1) + L(1)$*, segue que* $L(1) = 0$.

(iii) Como a função L *é crescente, temos que: se* $x > 1 \Longrightarrow L(x) > L(1) = 0$.
Por outro lado, usando novamente o fato da função L *ser crescente, temos que:*
$0 < x < 1 \Longrightarrow L(x) < L(1) = 0$.

(iv) Para todo número real positivo x*, temos:*

$$0 = L(1) = L\left(x \times \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow L(x) = -L\left(\frac{1}{x}\right).$$

(v) Para todos números reais postivos x, y*, tem-se:*

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \times \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

(vi) Vamos provar que esta propriedade é verdadeira nas quatro possibilidades distintas para o número racional r*:*

- r *é um número inteiro positivo;*
- r *é o número 0;*
- r *é um número inteiro negativo;*
- r *é um número racional não inteiro.*

Inicialmente, observe que: se $x,\ y,\ \ z \in \mathbb{R}^+$, *segue que* $L(x\times y\times z) = L(x)+L(y)+L(z)$. *De fato,*

$$L(x\times y\times z) = L[x\times(y\times z)] = L(x)+L(y\times z) = L(x)+L(y)+L(z).$$

Usando a idéia a cima, podemos facilmente concluir que:
se n *é um inteiro positvo e* $x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n\ \in \mathbb{R}^+$, *então temos:*

$$L(x_1\times\ x_2\times\ x_3\times\ \cdots\times\ x_n) = L(x_1)+L(x_2)+L(x_3)\cdots+L(x_n).$$

Portanto, tomando $x_1 =\ x_2 =\ x_3 = \cdots = x_n = x$, *temos*

$$L(x^n) = L(\underbrace{x\times x\times x\times\cdots\times x}_{n\ fatores}) = \underbrace{L(x)+L(x)+L(x)+\cdots+L(x)}_{n\ parcelas} = nL(x).$$

Portanto, a propriedade é válida se o racional r *for um número inteiro positivo:* $r = \dfrac{n}{1} = n$.

$$L(x^n) = n\times L(x),\quad se\ \ n\ \ \in \mathbb{Z}^+$$

Como, se $x \in \mathbb{R}^+$, *então* $x^0 = 1$, *temos que:* $L(x^0) = L(1) = 0 = 0\times L(x)$. *Portanto, a propriedade é válida para* $r = 0$.

$$L(x^0) = 0\times L(x),$$

Agora, suponha que o número racional r *seja um número inteiro negativo, isto é,* $r = -n$, *onde* n *é um inteiro positivo. Assim, para cada número real positvo* x *temos que:*

$$x^n\times x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^0 = 1.$$

Logo, temos que

$$L(x^n\times x^{-n}) = L(1) = 0 \iff L(x^n)+L(x^{-n}) = 0 \iff L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x).$$

$$L(x^{-n}) = -n\times L(x),\quad se\ \ n\ \ \in \mathbb{Z}^+$$

Suponha que $r = \frac{p}{q}$, *com* $p,q \in \mathbb{Z}$, *e* $q \in \mathbb{N}$. *Neste caso, observe que:*

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^{\frac{p}{q}\times q} = x^p.$$

Agora, usando o que foi provado acima, temos:

$$q\times L(x^r) = L[(x^r)^q] = L[(x^{\frac{p}{q}})^q = L(x^p) = p\times L(x).$$

Da igualdade $q\times L(x^r) = p\times L(x)$ *resulta que:* $L(x^{\frac{p}{q}}) = \dfrac{p}{q}\times L(x)$. *Logo, temos:*

$$L(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \times L(x), \ \ com \ \ p \in \mathbb{Z} \ \ e \ \ q \in \mathbb{N}$$

Observação

*A propriedade (vi) é válida também para o caso em que r seja um número real qualquer, não necessariamente um número racional. Isto é, é válida para **números irracionais** como:*

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{2},\ \pi \ etc.$$

No caso geral, para um número real qualquer r, é interessante saber o que significa uma potência irracional. Por exemplo, o que significa: $2^{\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{3}}, 2^{\pi}$ etc.?
*Definimos x^s, para s um número irracional, usando a **noção de limite**, que é um conceito estudado num curso de Cálculo Diferencial e Integral ou de Análise Matemática.*
Por exemplo, para definir $2^{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$, pensamos na sequência seguinte, formada a partir da expansão decimal de $\sqrt{2}$:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1,4 = \frac{14}{10}, \qquad a_3 = 1,41 = \frac{141}{100}, \qquad a_4 = 1,414 = \frac{1414}{1000}, \cdots,$$

Assim, cada termo da sequência é uma fração e, partir dela, consideramos a sequência $b_n = 2^{a_n}$:

$$b_1 = 2^1,\ b_2 = \sqrt[10]{2^{14}},\ b_3 = \sqrt[100]{2^{141}},\ b_4 = \sqrt[1000]{2^{1414}},\ \cdots$$

*que é crescente e limitada ($b_n < 2^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$), o que implica (por resultados estudados em cursos de Cálculo ou Análise) que ela possui um limite. Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{a_n}$ **existe.***
Definimos

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{a_n}.$$

*(vii) Inicialmente, vamos entender o que significa dizer que uma função logarítmica é **ilimitada** superior e inferiormente.*
*Uma função logaritmica é **ilimitada superiormente** se dado um número real K, é possível encontrar um número real positvo x para o qual tem-se $L(x) > K$.*
Para provar isto, basta tomar um número natural n, com $n > \frac{K}{L(2)}$. Observe que $L(2) > 0$, de acordo com a Propriedade Básica (iii). Assim, temos que:

$$n > \frac{K}{L(2)} \implies n \times L(2) > K \iff L(2^n) > K.$$

Portanto, dado K, tomamos $x = 2^n$, com $n > \frac{K}{L(2)}$, e teremos $L(x) > K$.
escolhido como base.
*Uma função logaritmica é **ilimitada inferiormente** se dado um número real M, é possível encontrar um número real positvo y para o qual tem-se $L(y) < M$.*
Para provar isto, basta lembrar que: $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$, para todo número real positivo.

Assim, dado qualquer número real M, pelo que vimos acima, podemos encontrar um número real positivo x para o qual $L(x) > -M$.
Agora, tomando $y = \frac{1}{x}$, temos que:

$$-L(y) = L\left(\frac{1}{y}\right) > -M \Leftrightarrow -L(y) > -M \Leftrightarrow L(y) < M.$$

Observação
*Definimos uma função logarítmica tendo como **domínio o conjunto dos números reais positivo**. É fácil ver que não poderíamos definir uma função logarítmica no 0. De fato, se existisse $L(0)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$ teríamos:*

$$L(0) = L(x \times 0) = L(x) + L(0) \implies L(x) = 0, \text{ para todo } x \text{ in } \mathbb{R}^+,$$

o que implicaria que a função logaritmica seria identicamente nula, o que contraria a Propriedade A.
Veja na referência [7], página 180, que é impossível extender o domínio de uma função logarítmica para os números reais negativos.
Vimos acima que uma função $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as Propriedades A e B é uma função logarítmica. Agora, observe que uma função :

$$M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

para a qual existe uma constante positiva $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $M(x) = cL(x)$, também é uma função logarítmica, pois, é fácil ver, M satisfaz as Propriedades A e B.
Vamos mostrar a seguir que, uma vez conhecendo uma função logarítmica L, a única maneira de se obter outra função logarítmica M é definindo: $M(x) = c \times L(x)$, para uma constante positiva $c \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 1
Dadas duas funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante positiva $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $M(x) = c \times L(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração
Suponha inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$.
Provaremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
Observe inicialmente que, da igualdade $L(a) = M(a)$ concluímos, usando as propriedades básicas das funções logarítmicas, que:

$$L(a^r) = M(a^r), \text{ para todo número racional } r.$$

De fato,

$$L(a^r) = r \times L(a) = r \times M(a) = M(a^r).$$

Agora, suponha por absurdo, que existisse algum número real positivo b tal que $L(b) \neq M(b)$. Para fixar idéias, digamos que fosse $L(b) < M(b)$. Escolhamos um número natural n tão grande de maneira tal que:

$$n \times [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Nesse caso, teríamos

$$[M(b)-L(b)] > \frac{1}{n}\times L(a) = \ L(a^{\frac{1}{n}}) \ \Leftrightarrow \ L(a^{\frac{1}{n}}) < M(b)-L(b).$$

Para simplificar, escrevamos $c = L(a^{\frac{1}{n}})$.
Os números $c,\ 2c,\ 3c,\ \cdots$ *dividem o conjunto* $\mathbb{R}^+$ *em intervalos juntapostos, de mesmo comprimento* c. *Como*

$$c < M(b)-L(b),$$

pelo menos um desses números, digamos $m.c$, *pertence ao interior do intervalo aberto* $(L(b), M(b))$, *ou seja,* $L(b) < m.c < M(b)$. *Ora,*

$$m.c = m.L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Como L é uma função crescente, a primeira desigualdade acima implica que $b < a^{\frac{m}{n}}$. *Por outro lado, como* M *também é uma função crescente, a segunda desigualdade implica que* $a^{\frac{m}{n}} < b$, *o que é uma contradição. Logo,* b *não existe, o que implica:* $M(x) = L(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$.
O caso geral reduz-se ao caso particular acima.
De fato, dadas L, M *funções logarítmicas arbitrárias, temos que* $L(2) > 0$ *e* $M(2) > 0$, *porque* $2 > 1$. *Seja* $c = \frac{M(2)}{L(2)}$. *Consideremos a função logarítmica*

$$N\ :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por $N(x) = c \times L(x)$.
Como $N(2) = c \times L(2) = [\frac{M(2)}{L(2)}] \times L(2) = M(2)$, *segue-se do que se provou acima que*

$$N(x) = M(x), \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^+,$$

ou seja, $M(x) = c \times L(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$, *como queríamos demonstrar.*
Observação
As propriedades dos logaritmos acima estabelecidas servem de fundamento para sua utilização como instrumento de cálculo. Vejamos um exemplo a fim de ilustrar o método.
Suponhamos que se deseje calcular $\sqrt[5]{2}$. *Para isso, supomos conhecido uma função logarítmica* L. *Pela Propriedade (vi), temos que*

$$L(\sqrt[5]{2}) = \frac{L(2)}{5}.$$

Consultando uma tábua de valores de L, *encontramos o valor* $L(2)$, *facilmente dividimos este valor por* 5 *e obtemos* $L(\sqrt[5]{2}) = c$, *um número conhecido. Novamente usando a tábua (desta vez no sentido inverso) encontramos um número positvo* b *tal que* $L(b) = c$. *Pela Propriedade (i), de* $L(b) = L(\sqrt[5]{2})$ *concluímos que* $b = (\sqrt[5]{2})$. *Problema resolvido.*

Reexaminado a solução acima surge uma questão.
Quem nos garante que, dado o número real c, *podemos encontrar* $b \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $L(b) = c$*?* *Noutras palavras, a solução do problema só estará completa se pudermos assegurar que a função logaritmica* $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ***é sobrejetiva****. Este ponto é esclarecido pelo teorema seguinte:*

Teorema 2
Toda função logarítmica L *é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real* c, *existe sempre um (único) número real possitivo* x *tal que* $L(x) = c$.
Demonstração

Ver a demonstração na referência [6], pois, embora elementar é um tanto longa.

Corolário
Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma bijeção entre* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}$.
Prova
Uma bijeção é uma função que é injetiva e sobrejetiva. A função logaritmica é injetiva pela ***Propriedade A*** *(o fato de ser crescente implica na injetividade) e o Teorma 2 nos diz que é sobrejetiva. Portanto, a função logarítmica é uma bijeção, o que significa dizer que possui uma inversa.*

Qualquer função f *dá origem à uma tábua de valores, onde numa coluna à esquerda põem-se os valores da variável* x, *pertencentes ao domínio, e noutra coluna, à direita, os valores corresponde de* $f(x)$, *pertencentes ao contra dominio, veja a seguir.*

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\cdots$	$\cdots$

Para uma função qualquer pode ocorrer que diferentes valores de x *corresponda o mesmo valor* $f(x)$. *O corolário acima mostra que toda tábua de logarítmos, isto é, tábua de valores de uma função logarítmica, pode ser lida da esquerda para direita, o que é normal, como da direita para esquerda.*
Dado um número real qualquer y, *podemos buscar na tábua o número real positivo* x *do qual* y *é o logarítmo. Como vimos acima, esta possibilidade é fundamental para o uso dos logarítmos no cálculo aritmético. A tabela dos logaritmos, lida da direita para esquerda, é na realidade a tábua dos valores da função inversa da função logarítmica, que chamaremos* ***função exponencial****.*
A função exponencial E, *inversa da função logarítmica* L, *é definida por:*

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

satisfazendo as propriedades seguintes:

- ***Propriedade (a)***
  $E(x+y) = E(x) \times E(y)$, *para todo* x, $y \in \mathbb{R}$.

- ***Propriedade (b)***
  As funções L e E satisfazem:

$$(E \circ L)(x) = x, \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^+$$
$$(L \circ E)(y) = y, \ \textit{para todo } y \in \mathbb{R},$$

*onde $(E \circ L)$ significa a **composição de funções**.*

Como consequência do fato de que uma função logarítmica é injetiva e sobre, segue que, dada uma função logaritmica qualquer

$$L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

*existe um único número real positvo a para o qual $L(a) = 1$. Este número é chamado **a base do logaritmo** L.*
Para explicitar a base, muitas vezes se escreve $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.
Os livros do Ensino Médio, quando usam os logaritmos, o fazem na notação: $log_a\,(x)$ ou $log_a\, x$.
Com essa notação, $log_a\,(a) = 1 = log_a\, a$.
Observação
Se L_a e L_b são funções logarítmicas, com $L_a = L_b = 1$, então o Teorema 1 assegura a existência de uma constante positiva c tal que

$$L_b(x) = c \times L_a(x), \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Agora, fazendo $x = a$, resulta $L_b(a) = c$. Portanto, temos:

$$L_b\,(x) = L_b(a) \times L_a\,(x), \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

*Esta é **a fórmula de mudança de base de logaritmos**. Na notação usada nos livros do Ensino Médio, a fórmula de mudança de base de logaritmo é:*

$$\boxed{log_b\, x \ = \ log_b\, a \ \times \ log_a\, x \qquad ou \qquad log_a\, x \ = \frac{log_b\, x}{log_b\, a}}$$

Exemplo 6.0.11 *Calcule* $\log_{\sqrt{2}} 32$.
Solução
Temos que:

$$\log_{\sqrt{2}} 32 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^5 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = \ 10 \cdot \log_{2^{\frac{1}{2}}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right) = 10 \cdot 1 = 10.$$

Exemplo 6.0.12 *Calcule* $\log_2 8 - \log_{\frac{1}{2}} 8$.
Solução
Temos que:

$$\log_2 8 - \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_2 2^3 - log_{\frac{1}{2}} 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 - \log_{\frac{1}{2}} \left(2^{-1}\right)^{-3} = 3 - (-3) = 6.$$

Exemplo 6.0.13 *Calcule* $\log_{15}(11.390.625)$.
Solução
Basta observar que o número $11.390.625 = 15^6$. *Agora, usando as propriedades básicas dos logaritmos, temos:*

$$\log_{15}(11.390.625) = \log_{15}\left(15^6\right) = 6\cdot\log_{15} 15 = 6.$$

Exemplo 6.0.14 *Calcule* $\log_{9\cdot\sqrt{3}}(3\cdot\sqrt[5]{27})$.
Solução
Temos que:

$$\log_{9\cdot\sqrt{3}}(3\cdot\sqrt[5]{27}) = \log_{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\left[3\cdot(3^3)^{\frac{1}{5}}\right] = \log_{3^{\frac{3}{2}}}\left[3^{\frac{3}{5}+1}\right] =$$

$$= \log_{3^{\frac{3}{2}}}\left[3^{\frac{8}{5}}\right] = \log_{3^{\frac{3}{2}}}\left[3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^{\frac{8\cdot 2}{5\cdot 3}} = \frac{8\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot\log_{3^{\frac{3}{2}}}\left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{15}\cdot 1 = \frac{16}{15}.$$

Exemplo 6.0.15 *Calcule o valor da expressão* $S = \log_2\sqrt[5]{2} + \log_2 8 + \log_2\frac{1}{4}$.
Solução
Temos que:

$$S = \log_2\sqrt[5]{2} + \log_2 8 + \log_2\frac{1}{4} = \log_2 2^{\frac{1}{5}} + \log_2 2^3 + \log_2 2^{-2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\log_2 2 + 3\cdot\log_2 2 - 2\cdot\log_2 2 = \frac{1}{5} + 3 - 2 = \frac{6}{5}.$$

Exemplo 6.0.16 *Calcule o valor da expressão* $E = \log_a a\cdot\sqrt[5]{a} + \log_{\frac{1}{a}}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$.
Solução
Temos que:

$$E = \log_a a\cdot\sqrt[5]{a} + \log_{\frac{1}{a}}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = \log_a a\cdot a^{\frac{1}{5}} + log_{\frac{1}{a}}\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \log_a a^{\frac{6}{5}} + \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{6}{5} + \frac{1}{6} = \frac{41}{30}.$$

Exemplo 6.0.17 *Calcule o valor da expressão* $M = \log_{a-b}\sqrt[3]{\frac{1}{a-b}} + \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{b}{a}\right) + \log_{a+b}\sqrt{a+b}$.
Solução
Temos que:

$$M = \log_{a-b}\sqrt[3]{\frac{1}{a-b}} + \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{b}{a}\right) + \log_{a+b}\sqrt{a+b} =$$

$$= \log_{a-b}(a-b)^{-\frac{1}{3}} + \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} + \log_{a+b}(a+b)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\log_{a-b}(a-b) + (-1)\cdot\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2}\cdot\log_{a+b}(a+b) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}.$$

Exemplo 6.0.18 *Calcule o valor da expressão* $S = \log_a\left(\sqrt[3]{a}\cdot a^3\right) - \log_b\left(\frac{\sqrt[5]{b^2}}{b^2}\right) + \log_{a\cdot b}(ab)^3$.

Solução

Temos que:

$$S = \log_a\left(\sqrt[3]{a}\cdot a^3\right) - \log_b\left(\frac{\sqrt[5]{b^2}}{b^2}\right) + \log_{a\cdot b}(ab)^3 =$$

$$= \log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot a^3\right) - \log_b\left(\frac{b^{\frac{2}{5}}}{b^2}\right) - 3\cdot\log_{a\cdot b}(a\cdot b) =$$

$$= \log_a\left(a^{\frac{1}{3}+3}\right) + \log_b\left(b^{\frac{2}{5}-2}\right) - 3 = \log_a a^{\frac{10}{3}} - \log_b b^{\left(-\frac{8}{5}\right)} - 3 =$$

$$= \frac{10}{3}\cdot\log_a a + \frac{8}{5}\cdot\log_b b - 3 = \frac{10}{3} + \frac{8}{5} - 3 = \frac{29}{15}.$$

Exemplo 6.0.19 *Resolva a equação:* $\log_2(3x-2) + \log_2(x-1) = 2\log_a x$.

Solução

Observe que, como o domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos, temos que:

$$x > 0 \quad e \quad 3x-2 > 0 \quad e \quad x-1 > 0 \Rightarrow x > 0 \quad e \quad x > \frac{2}{3} \quad e \quad x > 1 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Por outro lado,

$$\log_2(3x-2) + \log_2(x-1) = 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2(3x-2)\cdot(x-1) = \log_2 x^2.$$

Como a função logarítmica é injetiva, segue que

$$\log_2(3x-2)\cdot(x-1) = \log_2 x^2 \Rightarrow (3x-2)\cdot(x-1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 2x + 2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

o que implica: $x = 2$ *ou* $x = \frac{1}{2}$. *Mas,* $x > \frac{2}{3}$. *Portanto,* $x = 2$ *é a única solução.*

Exemplo 6.0.20 *Prove a identidade:* $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

Solução

A idéia é escrever $\log_{ab} x$ *como logaritmo na base* a*. Assim, usando a* ***fórmula de mudança de base****, podemos escrever:*

$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x}{\log_a(a\cdot b)} = \frac{\log_a x}{\log_a a + \log_a b} = \frac{\log_a x}{1 + \log_a b}.$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\log_a x}{\frac{\log_a x}{1+\log_a b}} = (\log_a x) \times \frac{1 + \log_a b}{\log_a x} = 1 + \log_a b.$$

Exemplo 6.0.21 *Resolver a desigualdade* $\log_{\frac{1}{2}}\ x + \log_3\ x > 1.$

Solução

Utilizando a fórmula de mudança de base, podemos escrever:

$$\log_{\frac{1}{2}}\ x = \frac{\log_3\ x}{\log_3\ \frac{1}{2}}.$$

Substituindo o valor encontrado acima na desigualdade dada, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}}\ x + \log_3\ x > 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{\log_3\ x}{\log_3\ \frac{1}{2}} + \log_3\ x > 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_3\ x \cdot \left(\frac{1}{\log_3\ \frac{1}{2}} + 1\right) > 1 \ \Leftrightarrow\ \log_3\ x \cdot \left(\frac{1 + \log_3\ \frac{1}{2}}{\log_3\ \frac{1}{2}}\right) > 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\log_3\ x \cdot \left(\frac{\log_3\ 3 + \log_3\ \frac{1}{2}}{\log_3\ \frac{1}{2}}\right) > 1 \ \Leftrightarrow \log_3\ x \cdot \left(\frac{\log_3\ \frac{3}{2}}{\log_3\ \frac{1}{2}}\right) > 1 \qquad (*)$$

Agora, mudamos a base de 3 *para* $\frac{3}{2}$ *no fator* $\left(\frac{\log_3\ \frac{3}{2}}{\log_3\ \frac{1}{2}}\right)$, *obtendo*

$$\log_3\ \frac{3}{2} = \frac{\log_{\frac{3}{2}}\ \frac{3}{2}}{\log_{\frac{3}{2}}\ 3} = \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}\ 3} \qquad e \qquad \log_{\frac{3}{2}}\ 3 = \frac{\log_{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{2}}{\log_{\frac{3}{2}}\ 3}$$

Assim,

$$\left(\log_3\ \frac{3}{2}\right) \div \left(\log_3\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}\ 3}\right) \times \left(\frac{\log_{\frac{3}{2}}\ 3}{\log_{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{2}} = \frac{1}{-\log_{\frac{3}{2}}\ 2}. \qquad (**)$$

Substituindo $(**)$ *em* $(*)$, *obtemos:*

$$\frac{\log_3\ x}{-\log_{\frac{3}{2}}\ 2} > 1. \qquad (***)$$

Como $2 > 1$ *e* $\frac{3}{2} > 1.$ *segue que* $\log_{\frac{3}{2}}\ 2 > 0,$ *o que implica que:*

$$\frac{\log_3\ x}{-\log_{\frac{3}{2}}\ 2} > 1 \Leftrightarrow \log_3\ x < -\log_{\frac{3}{2}}\ 2,$$

que nos dá a resposta procurada:

$$0 < x < 3^{-\log_{\frac{3}{2}}\ 2}.$$

Exemplo 6.0.22 *Resolva o sistema de equações:*

$$\begin{cases} x+y=70 \\ \log_{10}\ x+\log_{10}\ y=3 \end{cases}$$

Solução
A segunda equação pode ser escrita como:

$$\log_{10}\ x\cdot y=3=\log_{10}\ 10^3\ \Rightarrow\ x\cdot y=10^3\ \Rightarrow\ y=\frac{x}{10^3}.$$

Substituindo o valor de y *na primeira equação, obtemos*

$$x+\left(\frac{10^3}{x}\right)=70\ \Leftrightarrow\ x^2+1000=70x\ \Leftrightarrow\ x^2-70x+1000=0\Rightarrow\ x=20\ ou\ x=50$$

Se $x=20\Rightarrow\ y=70-20=50$. *Se* $x=50\Rightarrow\ y=70-50=20$.

Exemplo 6.0.23 *Resolva o sistema de equações:*

$$\begin{cases} 2\log_{10}\ x-3\log_{10}\ y=7 \\ \log_{10}\ x+\log_{10}\ y=1 \end{cases}$$

Solução
O sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \log_{10}\ x^2-\log_{10}\ y^3=7 \\ \log_{10}\ x+\log_{10}\ y=\log_{10}\ 10 \end{cases}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} \log_{10}\frac{x^2}{y^3}=\log_{10}\ 10^7 \\ \log_{10}\ x\cdot y=\log_{10}\ \ 10 \end{cases}$$

Como a função logarítmica é injetiva, segue que as duas equações do sistema implicam:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^3}=10^7 \\ x\cdot y=10 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $y=\frac{10}{x}$, *que substituindo na primeira equação temos:*

$$\frac{x^2}{\frac{10^3}{x^3}}=10^7\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2\cdot x^3}{10^3}=10^7\ \Leftrightarrow\ x^5=10^3\cdot 10^7\ \Leftrightarrow\ x^5=10^{10}\ \Leftrightarrow\ x=10^2,$$

o que implica: $x\cdot y=10\ \Leftrightarrow\ 10^2\cdot y=10\ \Leftrightarrow\ y=\frac{1}{10}$.
Portanto, a resposta é : $x=10^2=100$ *e* $y=\frac{1}{10}=10^{-1}$.

Exemplo 6.0.24 *Prove que:*

$$\frac{1}{\log_2 M}+\frac{1}{\log_3 M}+\frac{1}{\log_4 M}+\frac{1}{\log_5 M}+\cdots+\frac{1}{\log_{100} M}=\frac{1}{\log_{100!} M},$$

onde $100! = 1\cdot 2\cdots 3\cdot 4\cdots 100.$

Solução

Observe que, pela fórmula de mudança de base, temos:

$$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}.$$

Agora, aplicando o resultado acima para cada parcela da expressão dada, fazendo $a = M$, $b \in \{2,\ 3,\ 4, \cdots,\ 100\}$, *obtemos:*

$$\log_M 2+\log_M 3+\log_M 4+\log_M 5+\cdots+\log_M 100=\log_M(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots 100)=$$

$$=\log_M(100!)=\frac{\log_{100!} 100!}{\log_{100!} M}=\frac{1}{\log_{100!} M},$$

como queríamos provar.

Exemplo 6.0.25 *Mostre que* $\log_{10} 30 < \frac{3}{2}$.

Solução

Observe que $\log_{10} 10 = 1$ *e que*

$$\log_{10} 1000=\log_{10}(10\cdot 10\cdot 10)=\log_{10} 10+\log_{10} 10+\log_{10} 10=1+1+1=3.$$

Por outro lado, como $900 < 1000$ *e a função* $\log_{10} x$ *é uma função crescente, temos que:*

$$\log_{10} 900<\log_{10} 1000 \Leftrightarrow \log_{10}(30\cdot 30)<\log_{10} 10^3 \Leftrightarrow$$

$$\log_{10} 30+\log_{10} 30<3\log_{10} 10 \Leftrightarrow 2\cdot\log_{10} 30<3 \Leftrightarrow \log_{10} 30<\frac{3}{2}.$$

Exemplo 6.0.26 *Mostre que* $\log_{10} 2$ *é um número irracional.*

Solução

Suponha o contrário, isto é, que $\log_{10} 2$ *seja um número racional. Neste caso, existem dois números inteiros* m, n, *com* $n \neq 0$, *tais que* $\log_{10} 2 = \frac{m}{n}$. *Sem perda de generalidade, podemos supor que* m, *e* n, *não possuam fator em comum, além de* ± 1.

Assim,

$$10^{\frac{m}{n}}=2 \Rightarrow \left(10^{\frac{m}{n}}\right)^n=2^n \Leftrightarrow 10^m=2^n \Leftrightarrow 2^m\cdot 5^m=2^n \Leftrightarrow 5^m=2^{n-m},$$

que é uma contradição, pois:

(i) se $n > m$, *segue que o número da lado direito é par e o do lado esquerdo é ímpar.*

(ii) se $n < m$, *segue que o lado esquerdo da igualdade é um número inteiro, enquanto o número do lado direito não é.*

Exemplo 6.0.27 *Mostre que* $\log_{10} 3$ *é um número irracional.*
Solução

Suponha o contrário, isto é, que $\log_{10} 3$ *seja um número racional. Neste caso, existem dois números inteiros* m, n, *com* $n \neq 0$, *tais que* $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}$. *Sem perda de generalidade, podemos supor que* m, *e* n, *não possuam fator em comum, além de* ± 1.
Assim,

$$\log_{10} 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 3 \Leftrightarrow 10^m = 3^n.$$

A última igualdade é uma contradição, pois o número 10^m *se escreve na base* 10 *como* 1 *seguido de* m *zeros:* $10^m = 1\underbrace{00000\cdot 00}_{m\ zeros}$, *enquanto o número* $3^n = \underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3}_{n\ fatores}$, *não possui zero como um de seus dígitos.*

Exemplo 6.0.28 *Se* $\log_5\left(\log_3\left(\log_2 x\right)\right) = 0$, *encontre o valor de* x.
Solução

Usando o fato de que a função logarítmica é injetiva, podemos concluir que:

$$\log_5\left(\log_3\left(\log_2 x\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \log_5\left(\log_3\left(\log_2 x\right)\right) = \log_5 1 \Rightarrow \log_3\left(\log_2 x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_2 x\right) = \log_3 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^3 \Rightarrow x = 8.$$

Exemplo 6.0.29 *Encontre o maior subconjunto dos números reais positivos para o qual a função* $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)\right)$ *está definida.*
Solução

Como a função logarítmica está definida somente nos números reais positivos, temos que:

$$(i)\ x > 0; \quad (ii)\ \log_{\frac{1}{2}} x > 0; \quad (iii)\ \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0.$$

A condição (ii) pode ser reescrita como:

$$\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{-1} > \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 x < -\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 2^{-1} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

A condição (iii) pode ser rescrita como:

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > \log_2 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Portanto, as três condições são satisfeitas se, e somente se, $0 < x < \frac{1}{2}$.

6.1 As idéias de Napier

Há muitos séculos atrás, os cientistas e matemáticos faziam seus cálculos usando a maneira padrão atualmente ensinado na escolas do Ensino Fundamental. Por exemplo, se queriam fazer a multiplicação 32.768×512 *usavam o modo tradicional:*

$$\begin{array}{r} 3\,2\,7\,6\,8 \\ \times \quad\quad 5\,1\,2 \\ \hline 6\,5\,5\,3\,6 \\ 3\,2\,7\,6\,8 \\ 1\,6\,3\,8\,4\,0 \\ \hline 1\,6\,7\,7\,7\,2\,1\,6 \end{array}$$

É fácil ver que estes cálculos, quando os dois números são muito grandes, podem ser cansativos, penosos e muitas vezes sujeitos a erros, aumentando a duração das tarefas, terminando por ocupar o tempo que poderia ser utilizado à análise de outras tarefas mais importantes. Assim, na época eram bem-vindas todas as idéias para agilização e simplificação de contas. Para ajudar o trabalho penoso, Napier publicou, em 1614, *sua tabela de logaritmos que revolucionou o processo de fazer contas.*

A primeira constatação de que, em certos casos, é possível reduzir uma multiplicação à uma adição, ocorre ao se comparar os termos de uma ***progressão geométrica (p. g)*** *com os termos de uma* ***progressão aritmética (p. a)***, *veja as tabelas a seguir:*

Número	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024	2.048	4096
P. G.	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
P. A.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Para ***multiplicar*** *dois termos da progressão geométrica, por exemplo:* 8×256, *basta* ***somar*** *os correspondentes na progressão aritmética, no caso* $3+8=11$ *e ver qual é o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma, no caso* 2.048. *Portanto,* $8 \times 256 = 2.048$. *Para* ***dividir*** *dois termos da progressão geométrica, por exemplo:* $32 \div \frac{1}{2}$, *basta* ***subtrair*** *os correspondentes na progressão aritmética, no caso* $5-(-1)=6$ *e ver qual é o termo da progressaão geométrica que corresponde a essa subtração, no caso* 64. *(Na nossa tabela acima não aparece na progressão aritmética o número* -1, *mas, por intuição, vê-se que ele é o próximo número à esquerda depois do número* 0 *e que corresponde na progressão geométrica ao número* $\frac{1}{2}$*). Portanto,* $32 \div \frac{1}{2} = 64$.

Exemplo 6.1.1 *Usando a tabela a seguir, verifique que é possível reduzir uma multiplicação à uma adição.*

Número	1	5	25	125	625	3.125	15.625	78.125	390.625	1.953.125
P. G.	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9
P. A.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Solução
Para ***multiplicar*** *dois termos da progressão geométrica, por exemplo:* 15625×125, *basta* ***somar*** *os correspondentes na progressão aritmética, no caso* $6+3=9$ *e ver qual é o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma, no caso* $1.953.125$. *Portanto,* $15625 \times 125 = 1.953.125$.
Para ***dividir*** *dois termos da progressão geométrica, por exemplo:* $390.625 \div 3.125$, *basta* ***subtrair*** *os correspondentes na progressão aritmética, no caso* $8-5=3$ *e ver qual é o termo da progressaão geométrica que corresponde a essa subtração, no caso* 125. *Portanto,* $390.625 \div 3.125 = 125$.

Na sequência da publicação, em 1614, da tabela de Napier, o matemático inglês Henry Brigss (1561-1631) entrou em contacto com Napier e propôs a construção de uma nova tabela, que foi trabalhada em conjunto, utilizando o sistema numérico de base 10, *o que facilitou a sua elaboração.*
O sistema de logaritmos assim criado contém os denominados ***logaritmos decimais*** *ou* ***ordinários*** *ou* ***de base 10****.*
Brigss publicou em 1624, sob o título ***Arithmetica Logaritmica****, uma tabela dando os logaritmos na base* 10 *de todos os inteiros de* 1 *a* 20.000 *e de* 90.000 *a* 100.000, *com uma precisão de quatorze casas decimais. A lacuna dos números de* 20.000 *a* 90.000 *depois foi preenchida pelo matemático alemão Adrian Vlacqq.*

Na tabela de Briggs, $\log_{10} 7 = 0,84510$. *O número* 0 *é chamado* ***mantissa*** *e a parte decimal* 84510 *é a* ***característica****.*
A mantissa é sempre um número entre 0 *e* 1, *podendo ser* 0 *mas não igual a* 1. *A mantissa nunca é negativa.*
A característica de $\log_{10} x$ *é um número inteiro (positivo, negativo ou zero), o qual pode ser encontrado pela posição da vírgula no desenvolvimento de* x *como fração decimal. Por exemplo:*

$$\log_{10} 145,3 = \log_{10} 1,453 + 2.$$

$$\log_{10} 0,001453 = \log_{10} 1,453 - 5.$$

Vemos que se x *e* y *são números decimais que se diferem apenas pela posição da vírgula, então* $\log_{10} x$ *e* $\log_{10} y$ *possuem a mesma mantissa.*
Mais informações e exemplos pode ser obtidos no Capítulo 11 de [6].

Exemplo 6.1.2 *Sabendo que* $\log_{10} 7 = 0,84510$, *calcule:* $\log_{10} 70$, $\log_{10} 700$, $\log_{10} 0,7$.
Solução
Usando as propriedades da função logarítmica, temos

$$\log_{10} 70 = \log_{10} (7 \cdot 10) = \log_{10} 7 + \log_{10} 10 = 0,84510 + 1 = 1,84510.$$

$$\log_{10} 700 = \log_{10} (7 \cdot 100) = \log_{10} 7 + \log_{10} 10^2 = 0,84510 + 2 = 2,84510.$$

$$\log_{10} 0,7 = \log_{10} \frac{7}{10} = \log_{10} 7 - \log_{10} 10 = 0,84510 - 1 = -0,15490.$$

Exemplo 6.1.3 *Calcule os valores dos seguintes logaritmos:*

$$\log_{10}\ 10;\ \ \log_{10}\ \sqrt{10};\ \ \log_{10}\ \sqrt[4]{10};\ \ \log_{10}\ \sqrt[8]{10};\ \ \log_{10}\ \sqrt[16]{10};\ \cdots;\ \ \log_{10}\ \sqrt[2^n]{10}$$

Solução

$$\log_{10}\ 10 = 1$$
$$\log_{10}\ \sqrt{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{2}} = \log_{10}\ 10^{0,5} = 0,5 = 2^{-1}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[4]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^2]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{4}} = \log_{10}\ 10^{0,25} = 0,25 = 2^{-2}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[8]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^3]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{8}} = \log_{10}\ 10^{0,125} = 0,125 = 2^{-3}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[16]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^4]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{16}} = \log_{10}\ 10^{0,0625} = 0,0625 = 2^{-4}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[32]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^5]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{32}} = \log_{10}\ 10^{0,03125} = 0,003125 = 2^{-5}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[64]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^6]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{64}} = \log_{10}\ 10^{0,0156625} = 0,00156625 = 2^{-6}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[128]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^7]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{128}} = \log_{10}\ 10^{0,0078125} = 0,0078125 = 2^{-7}$$
$$\log_{10}\ \sqrt[256]{10} = \log_{10}\ \sqrt[2^8]{10} = \log_{10}\ 10^{\frac{1}{256}} = \log_{10}\ 10^{0,00390625} = 0,00390625 = 2^{-8}$$

....

$$\log_{10}\ \sqrt[2^n]{10} = 2^{-n}$$

Exemplo 6.1.4 *Sem usar calculadora ou computador, calcule* $\log_{10}\ 3$.
Solução

Procuramos potências de 3 *mais próximas de uma potência de* 10. *Assim, temos que:*

$$10.000.000.000 = 10^{10} < 3^{21} = 10.460.353.203 < 10^{11} = 100.000.000.000\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log_{10}\ 10^{9} < \log_{10}\ 3^{21} < \log_{10}\ 10^{11}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 9\cdot\log_{10}\ 10 < 21\log_{10}\ 3 < 11\cdot\log_{10}\ 10\ \Leftrightarrow\ 9 < 21\cdot\log_{10}\ 3 < 11\ \Leftrightarrow\ \frac{9}{21} < \log_{10}\ 3 < \frac{11}{21}$$

Portanto, $\log_{10}\ 3 \approx \frac{\frac{9}{21}+\frac{11}{21}}{2} \approx 0,4761904762.$

Capítulo 7

Uma Abordagem Geométrica Para o Conceito de Logaritmo

7.1 Introdução

A concepção geométrica de uma função logarítmica é uma idéia que vem do século XVII. O primeiro a percebê-la foi o padre jesuíta Gregory Saint Vicent [1]*, em 1647, e depois Isaac Newton* [2]*, em 1660. Os dois reconheceram uma relação estreita entre a faixa de uma hipérbole e os logaritmos.*

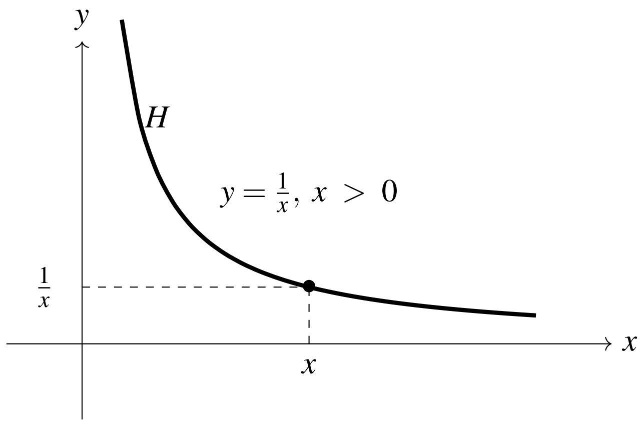
A seguir, mostramos o gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$*, para* $x > 0$*, definimos o que chamamos de uma **faixa sob a hipérbole** e calculamos sua área. Em seguida, mostraremos que estas áreas satisfazem relações que sugerem serem elas intimamente relacionadas com os logaritmos.*

Seja H *o ramo positivo do gráfico da função* $y = \dfrac{1}{x}$*, com* $x > 0$*, veja figura a seguir.*

---

[1] **Gregory Saint Vicent** $(1584-1667)$ foi um jesuíta e matemático belga. Saint-Vincent descobriu que a área da região sob gráfico da hipérbole equilátera $y = \frac{1}{x}$ é a mesma ao longo do intervalo $[a,b]$ *e* $[c,d]$ quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esta descoberta foi fundamental para a evolução da teoria de logaritmos e um eventual reconhecimento do logaritmo natural (cujo nome e representação em série foram descobertos por Nicholas Mercator , mas foi só mais tarde reconhecido como sendo de base **e**). A propriedade enunciada permite a definição de uma função $A(x)$ que representa a área sob a referida curva de 1 a x, e tem a propriedade: $A(x \cdot y) = A(x) + A(y)$. Uma vez que esta propriedade funcional caracteriza logaritmos, tornou-se moda chamar essa função $A(x)$ um logaritmo. Em particular, quando escolhemos a hipérbole retangular xy = 1, o logaritmo chama-se **logaritmo natural**. Em grande parte, o reconhecimento das realizações de Saint-Vincent, é devido ao seu aluno e colega de trabalho Alphonse Antonio de Sarasa , com Marin Mersenne atuando -como catalisador. Fonte: $http://en.wikipedia.org/wiki/Grgoire_de_Saint-Vincent$.

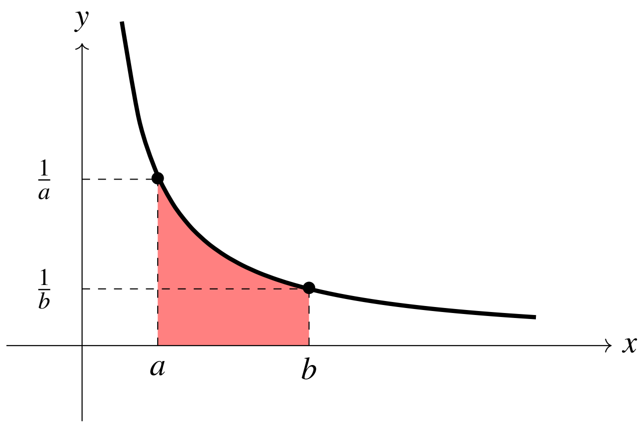
[2] **Sir Isaac Newton** (1642-1726), físico e matemático inglês, amplamente reconhecido como um dos cientistas mais influentes de todos os tempos e como uma figura chave na revolução científica . Seu livro Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, publicado pela primeira vez em 1687, lançou as bases para a mecânica clássica. Newton fez contribuições seminais para a óptica , e ele divide o crédito com Gottfried Leibniz (matemático alemão) pelo desenvolvimento de Cálculo Diferencial e Integral. O Principia, de Newton, formulou as leis do movimento e da gravitação universal, que dominaram a visão do universo físico dos cientistas para os próximos três séculos. Usou as Leis de Kepler para sua descrição matemática da gravidade, e, em seguida, usando os mesmos princípios para conhecer as trajetórias de cometas, as marés, a precessão dos equinócios , e outros fenômenos, Newton removido as últimas dúvidas sobre a validade do modelo heliocêntrico do Sistema Solar. Este trabalho também demonstrou que o movimento dos objetos na Terra e de corpos celestes poderia ser descrito pelos mesmos princípios. Sua previsão de que a Terra deve ter a forma de um esferóide oblato foi mais tarde confirmado pelas medições de Maupertuis, La Condamine, e outros, que ajudaram a convencer a maioria dos cientistas da Europa Continental da superioridade da mecânica newtoniana sobre o sistema anterior de Descartes. Newton construiu o primeira telescópio refletor e desenvolveu uma teoria de cor com base na observação de que um prisma decompõe a luz branca nas várias cores do espectro visível . Ele formulou uma lei empírica de arrefecimento , estudou a velocidade do som , e introduziu a noção de um fluido newtoniano . Além de seu trabalho no Cálculo, como um matemático Newton contribuiu para o estudo das séries de potência , generalizou o teorema binomial de expoentes não inteiros, desenvolveu um método para aproximar as raízes de uma função , e classificou a maioria das curvas planas cúbicas. Newton foi um professor do Trinity College e da Universidade de Cambridge. Além de seu trabalho nas ciências matemáticas, Newton dedicou grande parte de seu tempo ao estudo da cronologia bíblica e alquimia, mas a maioria de seu trabalho nessas áreas permaneceu inédito até muito tempo depois de sua morte. Em vida, Newton tornou-se presidente da Royal Society. FONTE: $http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton$.



O gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$, *com* $x > 0$ *visto acima, constitui o ramo positivo do gráfico da hipérbole* $xy = 1$, *que definimos por:*

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x},\ com\ x > 0\}$$

Observe que uma faixa sob a hipérbole é determinada a partir da escolha de números positivos, a *e* b, *com* $a < b$, *tomando a região do plano limitada pelas retas* $x = a$, $x = b$, *pelo eixo* X *e pelo ramo positivo,* H, *da hipérbole* $xy = 1$, *veja figura a seguir.*

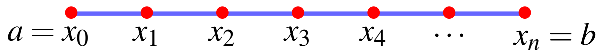


Para indicar a faixa colorida na figura acima, usaremos a notação de [6]: H_a^b. *Assim, temos:*

$$H_a^b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

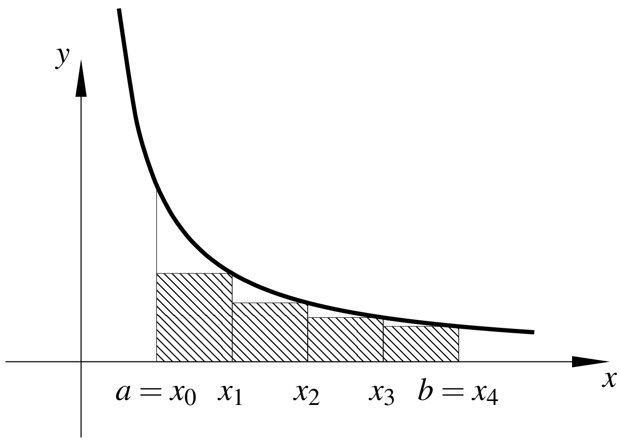
***Pergunta**: Como proceder para calcular a área de uma faixa* H_a^b*?*

Por intermédio de pontos intermediários, decompomos o intervalo $[a,\ b]$ *num número finito de intervalos juntapostos:*



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$$

Com base em cada um dos intervalos $[x_{i-1},\, x_i]$ *da decomposição do intervalo* $[a,\, b]$, *consideramos o retângulo de altura* $y_i = \frac{1}{x_i}$. *Observe que o vértice superior direito desse retângulo toca o ramo positivo,* H, *do gráfico da hipérbole* $y = \frac{1}{x}$. *Por isso, dizemos que o retângulo é um* ***retângulo inscrito na faixa*** H_a^b. *A reunião de todos esses retângulos inscrito constitui o que chamaremos um* ***polígono retangular inscrito na faixa*** H_a^b, *veja Figura a seguir para o caso* $n = 4$.

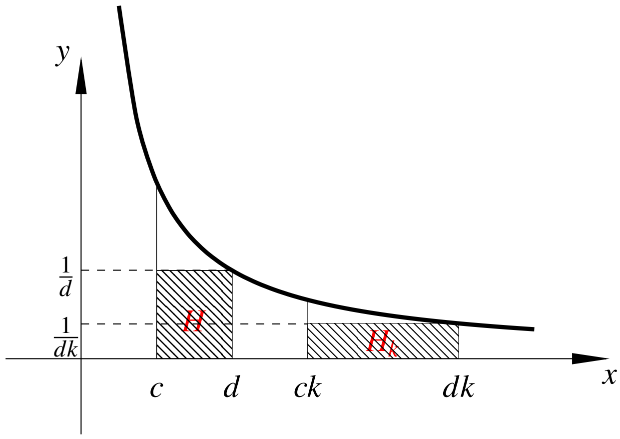


Calculando a área de um polígono retângular inscrito na faixa H_a^b *tem-se um valor aproximado (por falta) para a área da faixa* H_a^b. *Tanto mais aproximado será esse valor quanto mais fina for a divisão no intervalo* $[a,\, b]$. *Assim, definimos a área da faixa* H_a^b *como sendo o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares inscritos em* H_a^b.
Se escrevemos $A = $ *Área de* H_a^b, *teremos que* $A \geq$ *área de* P, *qualquer que seja o polígono retangular* P *inscrito em* H_a^b.
Dizemos que a área de H_a^b *é o* ***extremo superior*** *do conjunto da áreas dos polígonos retangulares inscritos em* H_a^b.
Portanto, $A = $ *área de* H_a^b *é o menor número real tal que* $A \geq$ *área de* P, *para todo polígono retangular inscrito em* $[a,\, b]$.

A seguir veremos o fato mais importante a respeito das áreas das faixas de hipérbole, que aproxima a noção de área de faixa sob a hipérbole ao conceito de logaritmo.

Teorema 3
Para qualquer número real positivo k, *as faixas* H_a^b *e* H_{ka}^{kb} *possuem a mesma área.*
Demonstração

Inicialmente, observe que: dado um retângulo H *inscrito em* H_c^d, *cuja base é o segmento* $[c,\, d]$ *do eixo das abcissas, o retângulo* H_k, *inscrito em* H_{kc}^{kd}, *com base no segmento* $[ck,\, dk]$ *possui a mesma área que* H, *veja Figura a seguir.*



De fato, a área de H *é dada por*

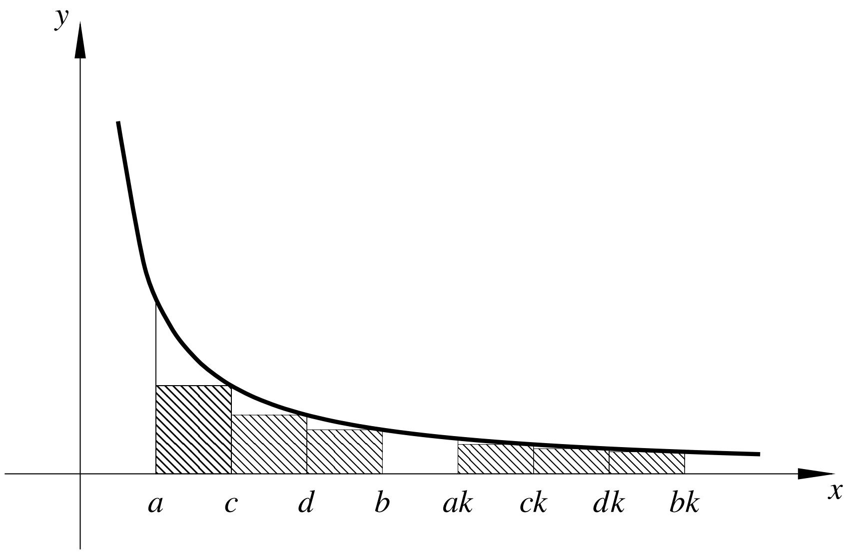
$$(d-c)\cdot\frac{1}{d}=1-\frac{c}{d},$$

enquanto a área de H_k *é dada por*

$$(dk-ck)\cdot\frac{1}{dk}=1-\frac{c}{d}.$$

Consideremos agora um polígono regular P, *inscrito na faixa* H_a^b. *Se multiplicarmos por* k

cada uma das abcissas dos pontos da subdivisão de $[a,\ b]$, *determinados por* P, *obtetremos uma subdivisão do intervalo* $[ak,\ bk]$ *e, portanto, um polígono retangular* P', *inscrito em* H_{ak}^{bk}, *veja Figura a seguir.*



Cada um dos retângulos que compõem P' *possui a mesma área que o retângulo correpondente em* P. *Logo, a área de* P' *é igual à de* P.

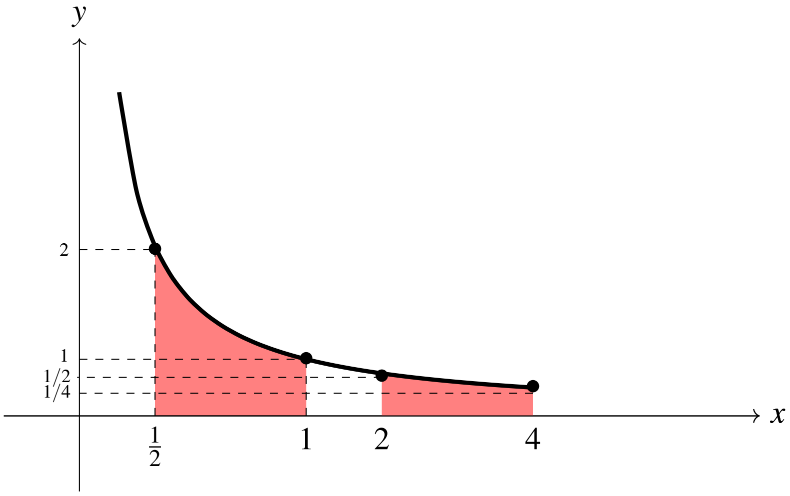
Concluímos assim que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b*, existe um inscrito em* H_{ak}^{bk} *com a mesma área. Analogamente, (dividindo cada abcissa por* k*) veríamos que, para cada polígono retangular* Q' *inscrito em* H_{ak}^{bk}*, existe outro,* Q*, de mesma área, inscrito em* H_a^b*. Isto significa que as áreas destas duas faixas sob a hipérbole* $y = \frac{1}{x}$*, com* $x > 0$ *são números que possuem extamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto iguais.*

Uma consequência deste teorema é que podemos restringir nossas considerações às áreas das faixas da forma H_1^c*, pois*

$$\acute{A}rea(H_a^b) = \acute{A}rea(H_1^{\frac{b}{a}}) = \acute{A}rea(H_1^c), \quad com\ c = \frac{b}{a}.$$

Quando $a < b < c$*, é fácil ver que*

$$\acute{A}rea(H_a^b) + \acute{A}rea(H_b^c) = \acute{A}rea(H_a^c) \qquad (*)$$



$$\acute{A}rea(H_{1/2}^1) = \acute{A}rea(H_2^4)$$

A fim de manter a validade da igualdade $(*)$ *acima para quaisquer* a, b, c *reais convencionaremos que:*

$$\acute{A}rea(H_a^a) = 0 \qquad e \qquad \acute{A}rea(H_a^b) = -\acute{A}rea(H_b^a)$$

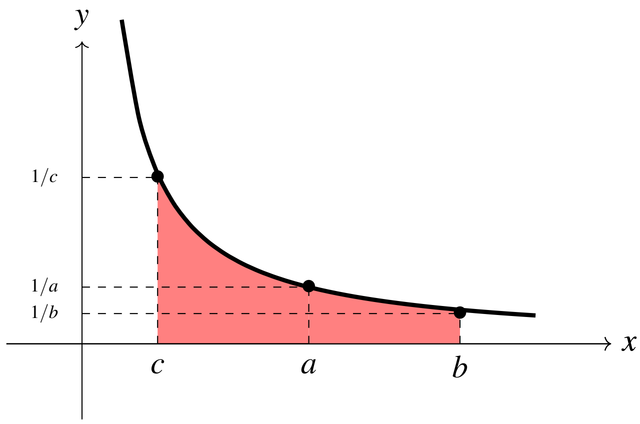
Observação
Esta última convenção implica em considerar áreas negativas. Assim,

$$\acute{A}rea(H_1^2) = -\acute{A}rea(H_2^1) < 0$$

Isto contraria a tradição mas, em compensação, a igualdade $(*)$ *acima torna-se verdadeira sem restrições.*

Vamos mostrar que, se $c < a < b$*, então temos*

$$\acute{A}rea(H_a^b) + \acute{A}rea(H_b^c) = \acute{A}rea(H_a^c) \qquad (*)$$



De fato, temos:

$$\acute{A}rea(H_c^b) = \acute{A}rea(H_c^a) + \acute{A}rea(H_a^b).$$

Daí segue que:

$$\acute{A}rea(H_a^b) - \acute{A}rea(H_c^b) = -\acute{A}rea(H_c^a),$$

ou seja,

$$\acute{A}rea(H_a^b) + \acute{A}rea(H_b^c) = \acute{A}rea(H_a^c) \qquad (*)$$

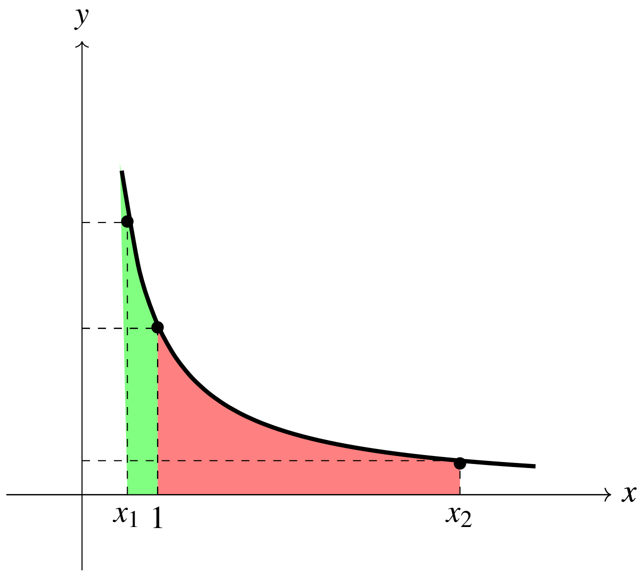
Capítulo 8

Logaritmos Naturais ou Logaritmos Neperianos

Seja x um número real positivo. Definiremos o ***logaritmo natural de*** x *como sendo a área da faixa H_1^x, que notamos*

$$\ln\, x = \acute{A}rea(H_1^x)$$

Observe que, para $0 < x < 1$, temos que $\ln\, x = \acute{A}rea(H_x^1) = -\acute{A}rea(H_1^x) < 0$.



Na Figura acima, como $0 < x_1 < 1$, e $x_2 > 1$, temos que:

$$\ln\, x_1 = \acute{A}rea(H_{x_1}^1) < 0 \quad e \quad \ln\, x_2 = \acute{A}rea(H_1^{x_2}) > 0.$$

Agora, observe que, quando $x = 1$, a faixa H_1^1 reduz-se a um segmento, que tem área igual a zero. Assim, podemos concluir que:

$$\ln\, 1 = 0;$$

$$\ln\, x > 0,\ se\ \ x > 1;$$

$$\ln\, x < 0, se\ \ 0 < x < 1.$$

Não está definido $\ln\, x$ quando $x < 0$.

Exemplo 8.0.1 *Calcule um valor aproximado por falta para $\ln\, 2$.*
Solução

Subdividimos o intervalo $[1,\, 2]$ em dez partes iguais por meio dos pontos de subdivisão:

Na tabela a seguir mostramos os valores de $\frac{1}{x}$ quando x assume os onze valores da subdivisão do intervalo $[1,\, 2]$:

x	$\frac{1}{x}$
1	1
1,1	0,909
1,2	0,833
1,3	0,769
1,4	0,714
1,5	0,666
1,6	0,625
1,7	0,588
1,8	0,555
1,9	0,526
2	0,500

Uma aproximação por falta para $\log 2$ *será dada pela área do polígono retangular inscrito na faixa* H_1^2*, fomado por* 10 *retângulos cujas bases medem* $0,1$ *e cujas altutas são dados pelos número da segunda coluna da tabela acima. É fácil ver que a área desse polígono retangular será igual a* $0,6685$*, que constitui a aproximação por falta de* $\ln 2$*.*

Para uma aproximação por excesso do valor de $\ln 2$*, consideramos os* 10 *trapézios circunscrito à faixa* H_1^2*, determinados pela mesma subdivisão do intervalo* $[1,\ 2]$*, veja Figura a seguir.*
É fácil ver que a soma das dez áreas desses trapézios será igual a $0,6935$*. Assim, o número* $\ln 2$ *está compreendido entre* $0,6685$ *e* $0,6935$*, isto é,*

$$0,6685 < \ln\ 2 < 0,6935.$$

Digitando numa calculadora Casio, modelo fx0300ES, encontramos $\ln\ 2 = 0,6931471306$*.*

Resumindo o que foi feito acima, fica definido uma função real

$$\ln\ :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

que a cada número real positivo x *faz corresponder seu logarítmo natural* $\ln\ x$*, definido acima.*

A seguir, vamos mostrar que a função $\ln$ *goza das propriedades (A) e (B) especificadas no Capítulo 6.*
Começaremos provando que

$$\ln\ (x \cdot y) = \ln\ x + \ln\ y.$$

Já vimos acima que:

$$Área(H_1^{xy}) = Área(H_1^x) + Área(H_x^{xy}),$$

seja qual for a posição relativa dos pontos de abcissa $1,\ x,\ xy$ *sobre o eixo horizontal. Já vimos que*

$$Área(H_x^{xy}) = Área(H_1^{xy}).$$

Observe que, comparando com o que fizemos anteriormente, aqui o x *desempenha o papel de* k*. Assim, segue que*

$$Área(H_1^{xy}) = Área(H_1^x) + Área(H_1^y),$$

o que significa dizer

$$\ln\,(x\cdot y)=\ln\,x+\ln\,y.$$

Agora, vamos provar que a função $\ln$ *é crescente.*
Para isso, sejam $x,\ y\ \in\mathbb{R}^{+}$. *Dizer que* $x<y$ *significa afirmar que existe um número real* $a>1$ *tal que* $y=a\cdot x$. *Assim, segue que:*

$$\ln\,(y)=\ln\,(a\cdot x)=\ln\,a+\ln\,x.$$

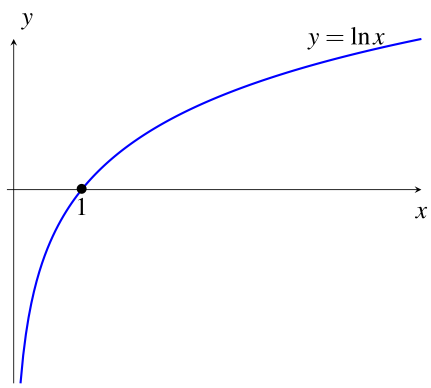
Como $a>1$, *temos que* $\ln\,a>0$. *Portanto,* $\ln\,y>\ln\,x$.
Como vimos no Capítulo 6, valem as seguintes regras com os logaritmos naturais, com $x,\ y\ \in\mathbb{R}^{+}$ *e* $m\ \in\ \mathbb{N}$:

$$\ln\,(x\cdot y)=\ln\,x+\ln\,y$$
$$\ln\,\left(\frac{1}{y}\right)=\ln\,y$$
$$\ln\,\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\,x-\ln\,y$$
$$\ln\,x^{m}=m\cdot\ln\,x$$
$$\ln\,\sqrt[m]{x}=\frac{\ln\,x}{m}$$

Agora esboçaremos o gráfico da função logaritmo natural, que é o conjunto

$$G=\{(x,\ \ln\,x)\ \in\mathbb{R}^{2};\ x>0\}.$$

O conhecimento do gráfico da função logaritmo natural permitirá que se tenha uma idéia global sobre o comportamento desta função.
É importante lembrar que a função $\ln$ *é crescente, ilimitada nos dois sentidos, superior e inferormente, e sobrejetiva. Isto significa que o gráfico de* $y=\ln\,x$ *é uma curva contido no primeiro e quarto quadrantes, a qual corta o eixo das abcissas no ponto* $x=1$ *e que, quando* x *varia entre* 0 *e* $+\infty$, *a ordenada do ponto* $(x,\ \ln\,x)$ *sobre a curva cresce de* $-\infty$ *a* $+\infty$, *o que siginifica dizer que o gráfico de* $y=\ln\,x$ *tem a forma da Figura a seguir.*

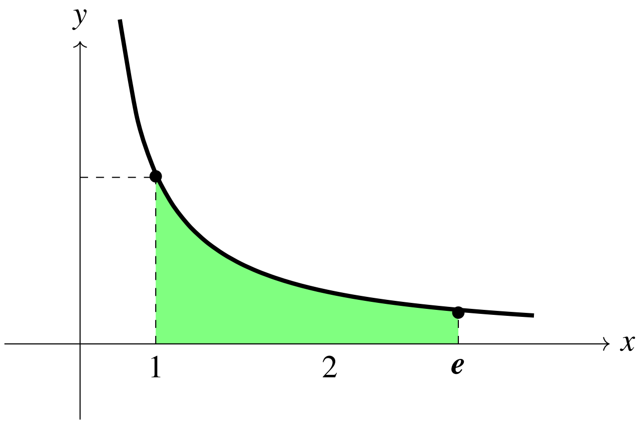


8.1 O Número e

A Propriedade (A) e o Teorema 2, do Capitulo 6, nos dizem que a função logaritmica é injetiva e sobre. Em particular é injetiva e sobre a função logaritmica natural. Portanto, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. *Tal número é representado pela letra* $\boldsymbol{e}$. *Ele é a base do sistema de logaritmos naturais. Isto significa que:*

$$\ln x = 1 \iff x = \boldsymbol{e}.$$

Portanto, a área da faixa $H_1^{\boldsymbol{e}}$ *é igual a* 1, *veja Figura abaixo.*



É fácil ver que $\boldsymbol{e} > 1$, *pois os número reais positivos menores do que* 1 *possuem logaritmo negativo.*
Como a área da faixa H_1^2 *é menor do que* 1 *e a área da faixa* H_1^3 *é maior do que* 1, *segue que*

$$\ln 2 < 1 < \ln 3.$$

Portanto, $2 < \boldsymbol{e} < 3$.

Em 1737, Leonard Euler provou que o número $\boldsymbol{e}$ *é irracional. Portanto, seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor de* $\boldsymbol{e}$ *com* 50 *dígitos decimais exatos é*

$$\boldsymbol{e} = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995$$

Teorema 5
Seja $r = \frac{p}{q}$ *um número racional. Tem-se*

$$y = \boldsymbol{e}^r \textit{ se, e somente se, } \ln y = r.$$

Demonstração

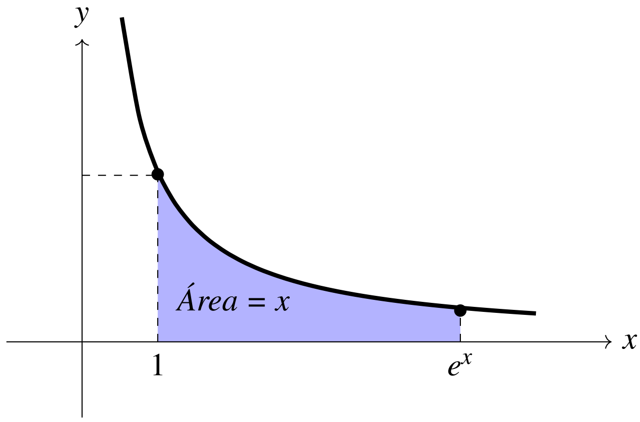
Se $y = \boldsymbol{e}^r$, *então* $\ln y = r \cdot \ln \boldsymbol{e} = r$, *pois* $\ln \boldsymbol{e} = 1$.
Reciprocamente, seja $y > 0$ *um número real tal que* $\ln y = r$. *Como* $\ln \left(\boldsymbol{e}^r\right) = r$ *e* $\ln$ *é uma função bijetiva, concluímos que* $y = \boldsymbol{e}^r$.

8.2 A Função Exponencial

Motivado pelo Teorema 5, definimos a seguir a potência $\boldsymbol{e}^x$, *onde* x *é um número real qualquer.*

Definição

Dado um número real x, $\boldsymbol{e}^x$ *é o único número positivo cujo logarítmo natural é* x. *Geometricamente,* $y = \boldsymbol{e}^x$ *é a abcissa que devemos tomar para que a faixa de hiperbole* H_1^y *tenha área igual a* x, *veja Figura a seguir.*



Vê-se que $\boldsymbol{e}^x > 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *que* $\boldsymbol{e}^x > 1$ *quando* $x > 0$ *e que* $\boldsymbol{e}^x < 1$ *quando* $x < 0$. *A equivalência abaixo é a definição de* e^x:

$$y = \boldsymbol{e}^x \iff x = \ln\, y.$$

Observações

(i) Em virtude o Teorema 5, quando $x = \frac{p}{q}$ *é um número racional, o número* y *cujo logarítmo é* x *é precisamente* $y = \sqrt[q]{\boldsymbol{e}^p}$. *Isto significa dizer que para* $x = \frac{p}{q}$ *racional, a nova definição de* $\boldsymbol{e}^x$ *coincide com a usual:* $e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\boldsymbol{e}^p}$.

(ii) De (i), se n *é um número inteiro positivo, temos:*

$$\boldsymbol{e}^n = \underbrace{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} \cdots \boldsymbol{e}}_{n \ \ fatores},$$

$$\boldsymbol{e}^{-n} = \frac{1}{\boldsymbol{e}^n}.$$

(iii) Agora, faz sentido tomar $\boldsymbol{e}^x$, *mesmo com* x *irracional. Por exemplo,* $\boldsymbol{e}^{\sqrt{2}}$ *é simplesmente o número* $y > 0$ *tal que a área da faixa* H_1^y *vale* $\sqrt{2}$.

A função exponencial $y = \boldsymbol{e}^x$ *é a função inversa da função logarítmica natural. Isto significa dizer que as igualdades abaixo são válidas para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e todo* $y > 0$:

$$\ln(\boldsymbol{e}^x) = x; \quad \boldsymbol{e}^{\ln\, y} = y.$$

A primeira igualdade das igualdades acima é simplesmente a definição de $\boldsymbol{e}^x$*: é o número cujo logaritmo é* x.
Quanto a segunda, $\boldsymbol{e}^{\ln\, y}$ *é o único número cujo logaritmo é igual a* $\ln\, y$*; ora tal número só pode ser* y.

Propriedades Fundamentais da Função Exponencial
(i) Para todos os números $x,\ y \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$\boldsymbol{e}^x \cdot \boldsymbol{e}^y = \boldsymbol{e}^{x+y}.$$

(ii) Para todo número real x*, tem-se:* $\boldsymbol{e}^{-x} = \dfrac{1}{\boldsymbol{e}^x}$.
(iii) A função exponencial $y = \boldsymbol{e}^x$ *é crescente e assume todos os valores positivos quando* x *varia entre* $-\infty$ *e* $+\infty$.
Demonstração

(i) Como $\ln$ *é uma função logaritmica, temos que:*

$$\ln\,(\boldsymbol{e}^x \cdot \boldsymbol{e}^y) = \ln\, \boldsymbol{e}^x + \ln\, \boldsymbol{e}^y = x + y.$$

(ii)

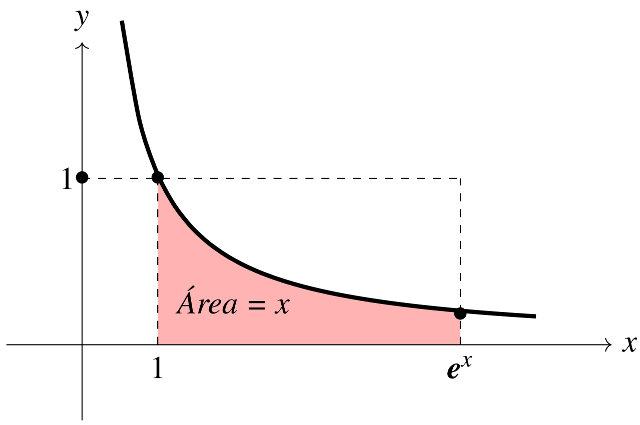
$$\boldsymbol{e}^{-x} \cdot \boldsymbol{e}^x = \boldsymbol{e}^{-x+x} = \boldsymbol{e}^0 = 1 \implies \boldsymbol{e}^{-x} = \frac{1}{\boldsymbol{e}^x}.$$

(iii) Sejam $x,\ y \in \mathbb{R}$*, com* $x < y$*. Como* $x = \boldsymbol{e}^{\ln\,(\boldsymbol{e}^x)}$ *e* $y = \boldsymbol{e}^{\ln\,(\boldsymbol{e}^y)}$*, não podemos ter* $\boldsymbol{e}^x = \boldsymbol{e}^y$*, pois isso implicaria que* $x = y$*. Por outro lado, não poderíamos ter* $\boldsymbol{e}^x < \boldsymbol{e}^y$*, porque então seria* $\ln\,(\boldsymbol{e}^y) < \ln\,(\boldsymbol{e}^x)$*, o que acarretaria* $x < y$*. Portanto, deve-se ter:* $\boldsymbol{e}^x < \boldsymbol{e}^y$.
Resta provar que os valores $\boldsymbol{e}^x$ *incluem todos os números reais positivos.*
Para isso, consideremos um número real qualquer $a > 0$*. Tem-se que* $a^{\ln\, a} = a$*. Logo,* a *é o valor que a função exponencial* $\boldsymbol{e}^x$ *assume quando* $x = \ln\, a$.

Observe ainda que tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

De fato, quando $x > 0$*, a faixa da hipérbole* $H_1^{\boldsymbol{e}^x}$*, cuja área vale* x*, está contida no retângulo de altura* 1*, com base no segmento* $[1,\ \boldsymbol{e}^x]$*, veja Figura a seguir.*



A área deste retângulo é igual a $\boldsymbol{e}^x - 1$. *Segue que:*

$$x < \boldsymbol{e}^x - 1 \Longrightarrow \boldsymbol{e}^x > 1 + x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Agora, quando $x \to +\infty$, *segue que* $1 + x \to +\infty$, *o que implica* $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{e}^x = +\infty$.
Quanto ao segundo limite, escrevemos $y = -x$, *o que nos dá:*

$$\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{e}^x = \lim_{y\to-\infty} \boldsymbol{e}^{-y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\boldsymbol{e}^y} = 0,$$

pois quando $\boldsymbol{e}^y$ *cresce infinitamente, seu inverso* $\dfrac{1}{\boldsymbol{e}^y}$ *tende a zero.*

O gráfico da função exponencial é o subconjunto de pontos do plano:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \boldsymbol{e}^x\}.$$

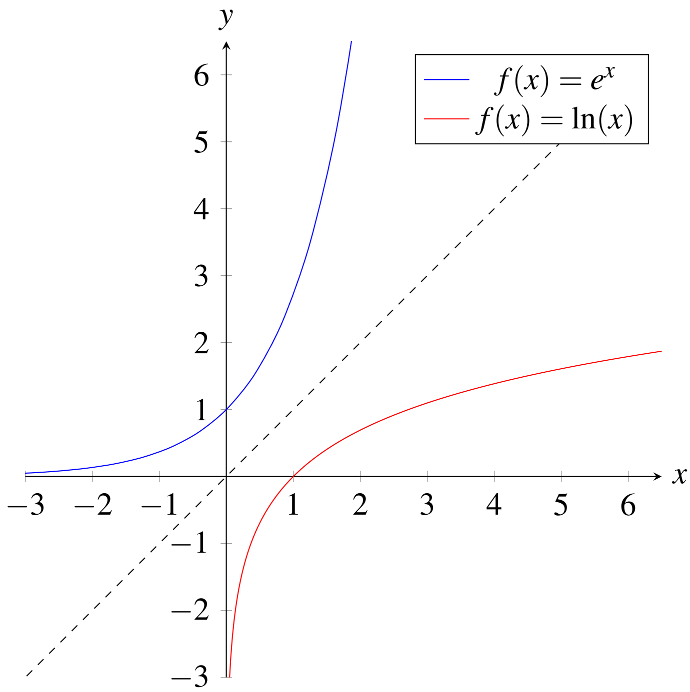
Por outro lado, o gráfico da função logaritmo natural é

$$G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ v = \ln u\}.$$

Assim,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow y = \boldsymbol{e}^x \Leftrightarrow x = \ln y \Leftrightarrow (y, x) \in G$$

Isto significa dizer que:
o ponto (x, y) *está no gráfico de* $\boldsymbol{e}^x$ *se, e somente se, o ponto* (y, x) *está no gráfico da função logaritmo.*
A diagonal do plano é a reta formada pelos pontos $(x, x) \in \mathbb{R}^2$.
Dado qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *o ponto* $(y, x) \in \mathbb{R}^2$ *é o seu simétrico com relação à diagonal. Isto significa que se dobramos o plano em torno da diagonal, o ponto* (x, y) *vai cair sobre o ponto* (y, x). *De fato, os pontos* (x, x), (x, y), (y, x), (y, y) *são os vértices de um quadrado. A reta* $y = x$ *é a mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos* (x, y) *e* (y, x), *pois as diagonais de um quadrado são perpendiculares e se cortam mutuamente ao meio.*
Portanto, os pontos do gráfico E *da função exponencial são simétrico dos ponto do gráfico* G *da função logaritmo, em relação à diagonal. Para obter* E, *basta dobrar o plano em torno da diagonal e observar onde vão parar os pontos de* G. *A seguir, o gráfico da função exponencial, da função logaritmo e da diagonal do plano, a reta* $y = x$.


y
x
$f(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6

Capítulo 9

Apêndice A

9.1 A Desigualdade entre a Média Aritmética e a Média Geométrica

Sejam $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ *números reais não negativos. Chamamos de* ***Média Aritmética*** *dos números* $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ *ao número*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

A ***Média Geométrica*** *dos números* $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ *é o número* $\sqrt[n]{a_1a_2.\cdots.a_n}$.
Existe uma relação entre a ***Média Aritmética*** *e a* ***Média Geométrica****, conhecida como a* ***Desigualdade das Médias****, dada por:*

Teorema
Se $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ *são números reais não negativos, então*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+\ a_2+\ \cdots+\ a_n}{n}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$.
Prova *(Cauchy)* [1]

A prova dada é por indução. A idéia da prova é fazê-la inicialmente para todo n que seja potência de 2*. Depois, usando esse fato, provar para todo* n *que esteja entre quaisquer duas potências consecutivas de* 2*.*
Assim, inicialmente vamos provar o resultado para o caso em que $n=2^1=2$.
Como o quadrado de qualquer número real é não negativo, temos que

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}. \quad (*)$$

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), matemático francês, de Paris. O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na Análise Matemática. O segundo foi no lado oposto - combinatorial. Partindo do ponto central do método de Lagrange, na teoria das equações, Cauchy tornou-a abstrata e começou a sistemática criação da teoria dos grupos. Não se interessando pela eventual aplicação do que criava, ele desenvolveu para si mesmo um sistema abstrato. Antes dele poucos, se algum, buscaram descobertas proveitosas na simples manipulação da álgebra. Foi um dos fundadores da teoria de grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, às quais seu nome está ligado. Definiu precisamente as noções de limite e integral definida, transformando-as em notável instrumento para o estudo das funções complexas. Sua abordagem da teoria das equações diferenciais inovadora, demonstrando a existência de unicidade das soluções, quando definidas as condições de contorno. Exerceu grande influência sobre a física de então, ao ser o primeiro a formular as bases matemáticas das propriedades do éter, o fluido hipotético que serviria como meio de propagação da luz. A vida de Augustin Cauchy assemelha-se a uma tragicomédia. Seu pai, Louis-François, conseguiu escapar da guilhotina apesar de ser advogado, culto, estudioso da Bíblia, católico fanático e tenente de polícia. Augustin era o mais velho dos seis filhos (dois homens e quatro mulheres). Seguia obstinadamente os preceitos da igreja católica. (Fonte http://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin Louis Cauchy, acessada em 14/12/2013).

Suponha que a Desigualdade da Média Aritmética e Média Geométrica seja verdadeira para $n = 2^{k-1}, k > 2$. *Isto é,*

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k-1}}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

Vamos mostrar a seguir que a Desiguladade da Média Aritmética e Média Geométrica vale para $n = 2^k$. *A idéia da prova é usar o caso* $n = 2$, *obtido em* $(*)$. *Para isso, chamemos:*

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \quad e \quad b_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

Assim, temos que:

$$\frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}}{2^k}.$$

Por outro lado, usando o caso $n = 2$, *veja* $(*)$ *acima, temos:*

$$\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right) . \left(\frac{a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1 a_2 \cdots a_{2^{k-1}})^{\frac{1}{2^{k-1}}} (a_{2^{k-1}+1} a_{2^{k-1}+2} \cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^{k-1}}}} =$$

$$\geq \sqrt[2^k]{(a_1.a_2.\cdots.a_{2^{k-1}}.a_{2^{k-1}+1}.a_{2^{k-1}+2}\cdots.a_{2^k})},$$

como queríamos provar.
Agora, vamos provar que o resultado também vale para todo n *que esteja entre duas potências consecutivas de* 2.
Assim, suponha que $2^{k-1} < n < 2^k$, *provaremos que o resultado vale para* n *números reais não negativos quaisquer:* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Sejam $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ *os* n *números dados por:*

$$b_1 = a_1, \ b_2 = a_2, \ b_3 = a_3, \cdots, \ b_n = a_n,$$

e

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{2^k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Assim, como o caso $n = 2^k$ *é verdadeiro, temos que:*

$$\boxed{\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{b_1.b_2.\cdots.b_n.b_{n+1}.\cdots.b_{2^k}} \quad (**)}$$

Mas, o lado esquerdo da desigualdade $(**)$ *acima pode ser escrito como:*

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+(2^k-n)\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{2^k}=$$

$$=\frac{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\times n+(2^k-n)\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{2^k}=$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\times\frac{\left[n+(2^k-n)\right]}{2^k}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

Por outro lado, o lado direito da desigualdade $(**)$ *acima pode ser escrito como:*

$$\sqrt[2^k]{b_1.b_2.\cdots.b_n.b_{n+1}.\cdots.b_{2^k}}=$$

$$\sqrt[2^k]{(a_1.a_2.\cdots.a_n).(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^{2^k-n}}$$

Logo, reescrevendo a desigualdade $(*)$*, temos:*

$$\left[\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right]^{2k}\geq(a_1.a_2.\cdots.a_n).(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^{2^k-n},$$

que é equivalente a

$$\left[\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right]^{2k-(2k-n)}\geq(a_1.a_2.\cdots.a_n),$$

que nos dá:

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{(a_1.a_2.\cdots.a_n)},$$

como queríamos provar.

Observação *- A desigualdade entre a Média Artimética e a Média Geométrica é uma ferramenta importante na resolução de problemas. Para ilustrar seu uso, a seguir vamos resolver o problema seguinte, proposto na Olimpíada Internacional de Matemática de* 1976.

*(**IMO** 1976) Determine, justificando, o maior número que é o produto de inteiros positivos cuja soma é igual* 1976.

Solução

Sejam $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ *números tais que:*

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1976.$$

Queremos maximizar o produtos $a_1a_2a_3\cdots a_n$. *A idéia é substituir os* $a_{k's}$ *de modo que, com a substituição, o produto seja aumentado,* ***mas a soma permaneça a mesma****. Pela Desigualdade da Média Arítmética e Média Geométrica, temos:*

$$a_1a_2a_3\cdots a_n\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Nosso objetivo é substituir os $a_{k's}$ *de modo que a maior quantidade possível deles seja de números iguais.*
Como fazer isso?

A idéia é: se temos $a_k \geq 4$, *substituímos* a_k *por dois números números:* 2 *e* $a_k - 2$. *Com isso, a soma dos* $a_{k's}$ *não muda, pois* $2 + a_k - 2 = a_k$, *enquanto o produto desses dois novos número* $2(a_k - 2) \geq a_k$, *pois estamos supondo* $a_k \geq$. *Logo, o produto será máximo se cada um dos números* a_k *satisfaz:* $a_k = 2$ *or* $a_k = 3$. *Portanto, temos que tomar, dentre os* $a_{k's}$, *o maior número possível de* 2 *e* 3.

Agora, como $2+2+2 = 3+3$, *mas* $2^3 < 3^2$, *temos que tomar não mais do que dois* 2. *Como* $1976 = 3 \cdot 658 + 2$, *então o maior produto possível satisfazendo ao problema é dado por* $2 \cdot 3^{658}$.

Capítulo 10

BIBLIOGRAFIA

1. HADAMARD, J. - Leçons de géométrie élémentaire, tome I, 13e édition, 1947, Editions Jacques Gabay, 1988, ISBN 2-87647-038-1.

2. HILBERT, D. - Foundations of Geometry, Open Court, 1999

3. JACOBS, H. R. - Geometry, 3rd edition, W. H. Freeman and Company, 2003

4. HONSBERGER, Ross - Ingenuity in Mathematics. The Mathematical Association of American. Washington. 1970

5. KISELEV, A. P. - Geometry. Book I. PLANIMETRY, adapted from Russian by Alexander Givental, Sumizdat, 2006, ISBN 0-9779852-0-2

6. LIMA, Elon Lages - Logaritmos. SBM. Rio de Janeiro. SBM. 1996

7. LIMA, Elon Lages - Meu Professor de Matemática e outras histórias. SBM. Rio de Janeiro. 1991

8. NÁPOLES, Suzana Metello de - O Papel da Geometria no Tratamento de Temas de Álgebra e Análise: Alguns Exemplos. PDF. Lisboa. 2008

9. NIVEN, Ivan - Maxima and Minima Without Calculus. The Mathematical Association of American. Washington. 1981

10. OLDHAM, Elizabeth; VALK, Ton Van Der; BROEKMANN, Harrie; BERENSON, Sarah - Beginining Pre-service Teachers' Approach to Teaching the Area Concept: identifying tendencies toward realistic, structuralist, mechnist or empirist mathematics education. European Journal of Teacher Education, Vol. 22, No. 1, 1999, 23-43.

11. SANTOS, David A. - Ossifrage and Algebra (Elementary Algebra). PDF. http://www.opensourcemath.org/books/santos/. 2008

12. SANTOS, David A. - Andragogic Propaedeutic Mathematics (A Course in Arithmetic). PDF. http://www.opensourcemath.org/books/santos/. 2008