NOTAS DE AULA

Conjuntos e Funções

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire

Agosto de 2015

0.1 Prefácio

Estas Notas de Aulas: Conjuntos e Funções, foram escritas, como material complementar, para os estudantes do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, promovido pela Secretaria de Educação a Distância, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Ao escrever estas Notas de Aulas, procuramos ser o mais claro possível, com o objetivo de facilitar o entendimento do aluno de um curso não presencial. Por isso, apresentamos no texto muitos exemplos com resoluções completas, as quais esperamos que estejam suficientemente claras e contribuam para a melhoria da prática docente do professor-cursista.

Estas Notas de Aula foram escritas usando o editor Latex.

Todos os erros e equívocos são de nossa responsabilidade. Receberemos com alegria comentários apontando eventuais erros, como também formas de melhorar o texto.

Natal, setembro de 2015

Benedito Tadeu Vasconcelos Freire
E-mail: beneditofreire22@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 A Noção de Conjunto

A noção de conjunto não se define. O conceito de conjunto aparece em todos os ramos da matemática. Intuitivamente, um conjunto é qualquer coleção de objetos bem definida. Notamos um conjunto por uma letra maiúscula: A, B, C, X, Y, $\ldots$.
Os objetos que constituem o conjunto são chamados elementos ou membros e são notados por letras minúsculas: a, b, x, y, $\ldots$.
A afirmação a **é um elemento do conjunto** A ou, a equivalente, a **pertence a** A é escrito como $a \in A$. A negação de $a \in A$ é escrita como $a \notin A$.

Existem duas maneiras de especificar um conjunto particular. Uma maneira, se há essa possibilidade, é listando todos seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\},$$

significa o conjunto A cujos elementos são as letras a, e, i, o e u. Observe que os elementos são separados por vírgulas e estão listados entre chaves { }.
Uma outra maneira: definindo as propriedades que caracterizam os elementos no conjunto. Por exemplo,

$$B = \{x; x \text{ é um número inteiro, x} > 0\},$$

que se lê B **é o conjunto dos** x **tais que** x **é um número inteiro com** x **é maior do que zero**. Uma letra, comumente x, é usada para denotar um elemento arbitrário do conjunto; o ponto vírgula (algumas vezes dois pontos) é lido como **tal que** e a vírgula como o conectivo **e**.
O conjunto B, acima, também pode ser escrito como

$$B = \{x |\ \text{x é um inteiro e x } > 0\},$$

onde a barra | significa **tal que.**

Exemplo 1.1.1 *Seja* $A = \{2, 3, 5\}$. *Observe que* $2 \in A$, $4 \notin A$, $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $5 \in A$, $\pi \notin A$.

Uma questão: *Quando é que dizemos que dois conjuntos, A e B, são iguais?*

O conjunto A é igual ao conjunto B se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos. Isto é, cada elemento do conjunto A é também um elemento do conjunto B e, reciprocamente, cada elemento de B pertence a A.
Notamos ***A igual a B*** *por* $A = B$.
A negação de $A = B$ *é escrita como* $A \neq B$.

Exemplo 1.1.2 *Considere os conjuntos:*
$E = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

$F = \{2, 1\}$;
$G = \{1, 2, 2, 1\}$.

Aqui, temos E = F = G,

Observe, então, que um conjunto não depende da maneira como seus elementos são dispostos nele e o conjunto é o mesmo se os seus elementos são repetidos ou rearranjados. Por exemplo::

$$A = \{1,\ 3,\ 6,\ 10, 12\} = \{3,\ 10,\ 1,\ 12,\ 6\} = \{1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 6,\ 12,\ 10\}.$$

Conjuntos podem ser finitos ou infinitos.
*Um **conjunto é finito** se possui n elementos distintos, onde n é um inteiro não negativo; caso contrário, é um conjunto infinito.*
*Um conjunto que possui um único elemento é chamado **conjunto unitário**. A primeira vista, parece estranho que a noção de conjunto aponte para a ideia de coleção e, no entanto, falamos de conjunto unitário. A noção de conjunto unitário é bastante útil. Posteriormente, no item 3, página 9, voltaremos para esclarecer melhor esse conceito.*

Exemplo 1.1.3 *O conjunto $A = \{x | x \text{ é a capital do Brasil}\}$ é um conjunto unitário.*
O conjunto, T, de todos os times que participam do campeonato brasileiro é um conjunto finito.
O conjunto de todos os pontos de uma reta é infinito.

Ao longo destas notas usaremos a notação abaixo para os seguintes conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ ***Conjunto dos Números Naturais**.*
$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ ,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ ***Conjunto dos Números Inteiros***
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ com\ n \neq 0\}$ ***Conjunto dos Números Racionais***
$\mathbb{R}$ ***Conjunto dos Números Reais**.*

É fácil ver que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset R$.

Observe que os conjuntos de números $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ *são infinitos.*

***Definimos** os seguintes subconjuntos da reta:*

- ***Intervalo aberto** de a até* $b = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \ a < x < b\}$.

- ***Intervalo fechado** de a até* $b = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \ a \leq x \leq b\}$.

- ***Intervalo aberto-fechado** de a até* $b = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \ a < x \leq b\}$.

- ***Intervalo fechado-aberto** de a até* $b = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \ a \leq x < b\}$.

Exemplo 1.1.4 *Considere os seguintes conjuntos:*
$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ *(Conjunto dos Números Naturais);*
$A = \{1,3,5,7,\ldots\}$ *(Conjunto dos Números Naturais Ímpares);*
$B = \{x | x$ *é um número primo com* $x > 2\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ldots$*;*
$C = \{3,6,9,12,\ldots\}$ *(Conjunto de todos os múltiplos inteiros positivos de 3).*

Observe que, no exemplo dado, todo elemento do conjunto A *é elemento de N. Quando isso acontece, dizemos que o conjunto* A *é um* ***subconjunto*** *de N e denotamos esse fato por* $A \subset \mathbb{N}$.
A negação de que $A \subset \mathbb{N}$ *é escrita como:* $A \not\subset \mathbb{N}$.
Assim, como todo número primo maior do que 2 é ímpar, temos que: $B \subset A$, $C \subset \mathbb{N}$ *e* $C \not\subset A$.
Observe também que, C *é um subconjunto de* $\mathbb{N}$, *mas não é igual a* $\mathbb{N}$. *Nesse caso, dizemos que* C *é um* ***subconjunto próprio*** *de* $\mathbb{N}$.

Assim, para dois conjuntos quaisquer A *e* B, *se* $A \subset B$, *dizemos que* A ***é subconjunto de*** B *ou* A ***é uma parte de*** B. *Se* $A \subset B$, *mas* $A \neq B$, *dizemos que* A ***é um subconjunto próprio*** *de* B.

NOTA*: Observe que* $A \subset B$ *não exclui a possibilidade de* $A = B$. *De fato, podemos definir a igualdade entre dois conjuntos como:*

$$A = B \text{ se, e somente se, } A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Sejam A, B *e* C *três conjuntos quaisquer. Prove que são verdadeiras as afirmações:*

(i) $A \subset A$. *(reflexividade)*
(ii) $A \subset B$ *e* $B \subset A$ *então* $A = B$.
(iii) Se $A \subset B$, $B \subset C$, *então* $A \subset C$. *(transitividade)*

Todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

1.2 O Conjunto Universal

Normalmente, em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, todos os conjuntos em discussão são subconjuntos de um conjunto fixo. Chamamos este conjunto de ***conjunto universal ou universo*** *e o denotamos por* ***U****.*

Exemplo 1.2.1 *Quando estudamos a geometria plana, o conjunto universo é o conjunto de todos os pontos do plano. Quando estudamos a aritmética dos inteiros, o conjunto dos números* *inteiros, $\mathbb{Z}$ é o conjunto universal.*

Exemplo 1.2.2 *Considere os seguintes conjuntos:*
S = conjunto de todos os quadriláteros P = conjunto de todos os paralelogramos R = conjunto de todos os retângulos L = conjunto de todos losangos Q = conjunto de todos os quadrados.

É fácil verificar que: $Q \subset L \subset P \subset S$ (basta usar a definição de cada um dos quadriláteros acima).

1.3 O Conjunto Vazio

Um conjunto é vazio se não possui qualquer elemento. A princípio é estranho que o conceito de conjunto aponte para a noção de coleção ou agrupamento ou ajuntamento e, no entanto, se fale em conjunto unitário, conjunto vazio. Faremos, a seguir, um rápido comentário sobre a questão. Suponha que temos o seguinte conjunto:

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

Observe que se retiramos o elemento 5 do conjunto S, obtemos um novo conjunto:

$$S_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Se desse conjunto, retiramos o elemento $4,$ obtemos um novo conjunto:

$$S_2 = \{1,2,3.$$

Se do conjunto S_2 retiramos o elemento $3,$ obtemos um outro conjunto:

$$S_3 = \{1,2\}.$$

Observe então que, quando temos um conjunto e retiramos um elemento desse conjunto, é natural que obtenha um outro conjunto. Para que essa propriedade seja válida sempre, deveremos obter outro conjunto quando retiramos o elemento 2 do conjunto S_3 , isto é, teríamos que considerar como conjunto:

$$S_4 = \{1\}, \text{ (que é chamado, por ter um único elemento, de conjunto unitário).}$$

Desse modo, ao retirarmos o elemento 1 de S_4 obtemos um conjunto sem qualquer elemento:

$$S_5 = \{\}, \text{que chamamos de conjunto vazio.}$$

Resumindo, temos a seguinte propriedade:

Se de um conjunto retirarmos um elemento, o que resulta é um outro conjunto,

Se queremos adotar como verdadeira a propriedade acima, temos que aceitar a existência do conjunto unitário e do conjunto vazio. Com isso, aceitando o procedimento, ganhamos uma propriedade (isto é o **Princípio da Economia do Pensamento***).*
Desse modo, as noções de conjunto unitário e conjunto vazio aparecem, e são úteis, apesar do conceito de conjunto ser entendido como coleção de elementos ou agregado de elementos.

Notamos o conjunto vazio por $\{\}$ *ou* $\emptyset$.
Observe que o conjunto $B = \{\emptyset\}$ ***não*** *é o conjunto vazio, pois* B *tem um elemento, que é o* $\emptyset$.
Nesse caso, o conjunto B *é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio!*

Exemplo 1.3.1 *O conjunto* $A = x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\}$ *não possui elemento, pois nenhum número real multiplicado por ele mesmo resulta em numero negativo. Logo,* $A = \emptyset$.

Observação

O conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto.

1.4 O Conjunto das Partes

No conjunto das retas do plano, cada reta é um conjunto de pontos. No conjunto de planos do espaço tridimensional, cada plano é um conjunto de retas. Ou seja, podemos falar de conjuntos cujos elementos são conjuntos.
Dado um conjunto A, *a coleção de todos os subconjuntos de* A *é um conjunto cujos elementos são conjuntos. Chamamos a coleção de todos os subconjuntos do conjunto* A *de* ***conjunto das partes de A*** e *é denotado por* $\mathbb{P}(A)$; *isto é:*

$$\mathbb{P}(A) = \{A | A \subset A\}.$$

Exemplo 1.4.1 *Se* $A_0 = \emptyset$, *então* $\mathbb{P}(A_0) = \{\emptyset\}$ *(conjunto uitário).*

Exemplo 1.4.2 *Se* $A_1 = \{a_1\}$, *então* $\mathbb{P}(A_1) = \{\emptyset,\ \{a_1\}\}$.

Exemplo 1.4.3 *Se* $A_2 = \{a_1,\ a_2\}$, *então* $\mathbb{P}(A_2) = \{\emptyset,\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_1,\ a_2\}\}$.

Exemplo 1.4.4 *Se* $A_3 = \{a_1,\ a_2, a_3\}$, *então* $\mathbb{P}(A_3) = \{\emptyset,\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_1,\ a_2\},\ \{a_3\},\ \{a_1, a_3\},$ $\{a_2,\ a_3\},\ \{a_1,\ a_2, a_3\}\}$.

Exemplo 1.4.5 *Se* $A_4 = \{a_1,\ a_2, a_3, a_4\}$, *então* $\mathbb{P}(A_4) = \{\emptyset,\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_1,\ a_2\},\ \{a_3\},\ \{a_1, a_3\},$ $\{a_2,\ a_3\},\ \{a_1,\ a_2, a_3\},\ \{a_4\},\ \{a_1,\ a_4\},\ \{a_2,\ a_4\},\ \{a_1,\ a_2,\ a_4\}, \{a_3,\ a_4\},$
$\{a_1,\ a_3,\ a_4\},\ \{a_2,\ a_3,\ a_4\},\ \{a_1,\ a_2, a_3,\ a_4\}\}$.

É interessante observar que, considerando os conjuntos dos cinco exemplos acima, dentre os subconjuntos de cada conjunto A_i, *(com* $i = 1, 2, 3, 4$*) estão todos os subconjuntos do conjunto precedente mais os subconjuntos formados a partir deles acrescentando-se o elemento* a_{i+1} *a cada um.*
Com isto, é fácil ver que a quantidade de subconjunto de A_{i+1} *é o **dobro** da quantidade de subconjuntos de* A_i.

Assim, quando o número de elementos de um conjunto for 0 *(conjunto vazio), então a quantidade de subconjuntos é* $2^0 = 1$.
Quando o número de elementos de um conjunto for 1, *então a quantidade de subconjuntos é* $2 \times 1 = 2 = 2^1 = 2$.
Quando o número de elementos do conjunto for 2, *então a quantidade de subconjuntos é* $2 \times 2 = 2^2 = 4$.
Quando o número de elementos do conjunto for 3, *então a quantidade de subconjuntos é* $2 \times 2^2 = 2^3 = 8$.
Quando o número de elementos do conjunto for 4, *então a quantidade de subconjuntos é* $2 \times 2^3 = 2^4 = 16$.

Em geral:

Se um conjunto possui n *elementos, então o número de seus subconjuntos é igual a* 2^n.

1.5 Operações com Conjuntos

*Dados dois conjuntos podemos realizar operarações para obter um outro conjunto. As operações mais comuns entre dois conjuntos são: **união, interseção, diferença, complementar, diferença simétrica**.*

*A **união** de dois conjuntos* A *e* B, *denotada por* $A \cup B$, *é a coleção de todos os elementos que pertencem ao conjunto* A *ou ao conjunto* B; *isto é,*

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

*Observe que a disjunção **ou** é usada no sentido **e/ou**.*

*A **interseção** de dois conjuntos* A *e* B, *denotada por* $A \cap B$, *é a coleção de todos os elementos que pertencem **simultaneamente** ao conjunto* A *e ao conjunto* B; *isto é :*

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, *dizemos que os conjuntos* A *e* B *são* ***disjuntos***.

Chamamos ***diferença*** *do conjunto* B *com respeito ao conjunto* A, *ou simplesmente* ***diferença*** *de* A *e* B, *denotada por* $A - B$, *a coleção dos elementos que pertencem ao conjunto* A *mas não pertencem ao conjunto* B, *isto é :*

$$A - B = \{x | x \in A \ e \ x \notin B\}.$$

Observe que os subconjuntos $A - B$ *e* B *são disjuntos.*

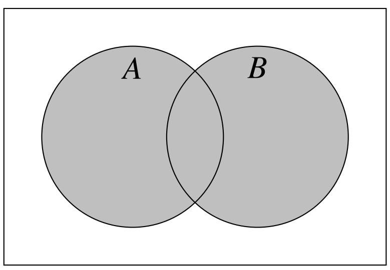
O ***complementar*** *de um conjunto* A *relativamente ao conjunto universal* U, *denotado por* A^c, *é igual a diferença* $U - A$, *isto é,*

$$A^c = \{x | x \in U \ e \ x \in A\}.$$

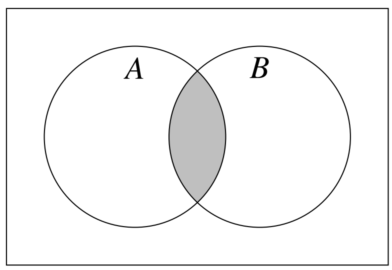
A ***diferença simétrica*** *dos conjuntos* A *e* B, *denotada por* $A \, \Delta \, B$, *é a união da diferença do conjunto* B *com respeito ao conjunto* A *e do conjunto* A *com respeito ao conjunto* B, *isto é:*

$$A \, \Delta \, B = (A - B) \cup (B - A).$$

Os diagramas mostrados a seguir, chamados de ***diagramas de Venn***,[1] *ilustram as operações definidas acima. Os conjuntos são representados por áreas planas e* U, *o conjunto universal, pela área do retângulo que envolve os conjuntos.*

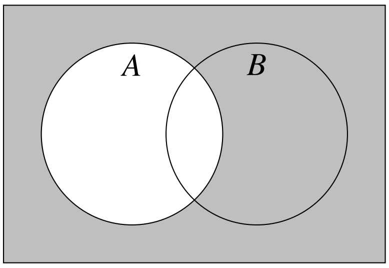


$A \cup B$

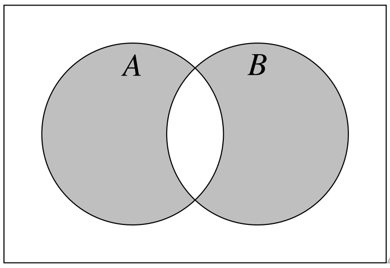


$A \cap B$

[1]John Venn (1834-1923), matemático inglês, professor de Ciência Moral na Universidade de Cambridge, estudou e ensinou lógica e teoria das probabilidades. John Venn licenciou-se na Universidade de Cambridge em 1857; dois anos mais tarde foi ordenado padre. Em 1862 voltou para a Universidade de Cambridge como professor de Ciências Morais, estudando técnicas lógicas e a teoria das probabilidades. Desenvolveu a lógica matemática de Boole, tendo estabelecido uma forma de representação gráfica das intersecções e uniões de conjuntos, através de diagramas que levam o seu nome. Publicou, em 1866, o livro Logic of Chance, que foi considerado muito original e influenciou o desenvolvimento da estatística. Em 1881, lançou Symbolic Logic e, em 1889, The Principles of Empirical Logic. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John$_{Venn}$



A^c



$A\Delta B$

As operações definidos acima satisfazem a várias leis ou identidades que são listadas abaixo:

(i) $A\cup A = A$ *(Idempotente)*
(ii) $A\cap A = A$ *(Idempotente)*
(iii) $(A\cup B) = (B\cup A)$ *(Comutatividade)*
(iv) $(A\cap B) = (B\cap A)$ *(Comutatividade)*
(v) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$ *(Distributividade)*
(vi) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$ *(Distributividade)*
(vii) $A\cup\emptyset = A$ *(Identidade)*
(viii) $A\cap\emptyset = \emptyset$ *(Identidade)*
(ix) $(A^c)^c = A$
(x) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$
(xi) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$
(xii) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
(xiii) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

No exemplo a seguir, veremos o uso de técnicas para demonstração de igualdade entre conjuntos. Demonstraremos a propriedade (vi) acima.

Exemplo 1.5.1 *Mostrar que:* $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$.
Solução

Lembramos que dois conjuntos quaisquer, M *e* N*, são iguais se, e somente se,* $M\subset N$ *e* $N\subset M$*. Assim, temos que mostrar dois fatos:*

(i) $(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$
(ii) $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$.

Para mostrar o fato (i), temos que verificar que todo elemento de $(A\cup B)\cap C$ *também é elemento de* $(A\cap C)\cup(B\cap C)$*. Para isso, tomemos um elemento qualquer* x *pertencente a* $(A\cup B)\cap C$*. Pela definição de interseção conclui-se que* $x\in(A\cup B)$ *e* $x\in C$*, ou seja:* ($x\in A$ *ou* $x\in B$) *e* $x\in C$ *, ou ainda* ($x\in A$ *e* $x\in C$) *ou* ($x\in B$ *e* $x\in C$)*, que implica* $x\in[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$*, o que conclui a prova da afirmação (i).*

Para mostrar o fato (ii), temos de verificar que todo elemento de $[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$ *também é elemento de* $(A\cup B)\cap C$*. Para isso, tomemos um elemento qualquer,* $x\in[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$.

Pela definição de união, $x \in (A \cap C)$ *ou* $x \in (B \cap C)$. *Ou seja,* $(x \in A$ *e* $x \in C)$ *ou* $(x \in B$ *e* $x \in C)$ *, ou seja,* $(x \in A$ *ou* $x \in B)$ *e* $x \in C$. *Isto é,* $x \in (A \cup B)$ *e* $x \in C$, *que é o mesmo que* $x \in [(A \cup B) \cap C]$, *o que conclui a prova de (ii).*

As verificações das demais identidades são deixadas como exercício.

1.6 Aplicações

Para qualquer conjunto finito X, *denotamos por* $\#X$ *o número de elementos de* X. *Por exemplo, se* $X = \{1, 3, 4, 7, 20\}$ *então* $\#X = 5$.
Se dois conjuntos finitos, A *e* B, *satisfazem* $A \subset B$, *então* $\#A \leq \#B$.
Se dois conjuntos finitos, A *e* B, *não possuem elementos em comum, isto é* $A \cap B = \emptyset$, *é razoável considerar que* $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
É fácil ver que os conjuntos A *e* $B - A$ *são disjuntos, isto é,* $A \cap (B - A) = \emptyset$. *O mesmo vale para os conjuntos* B *e* $(A - B)$.

Exemplo 1.6.1 (Princípio da Inclusão-Exclusão)
Se A *e* B *são dois conjuntos finitos, então*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Prova

Inicialmente, escrevemos os conjuntos $A \cup B$ *e* B *como a união de dois conjuntos disjuntos:*

$$A \cup B = A \cup (B - A) \quad e \quad B = (B - A) \cup (A \cap B).$$

Como os conjuntos $A \cup B$ *e* B *são escritos como união de conjuntos disjuntos, temos:*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#(B - A) \quad e \quad \#B = \#(B - A) + \#(A \cap B).$$

Explicitando o valor de $\#(B - A)$ *na segunda igualdade e substituindo na primeira, temos:*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#(B - A) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$$

NOTA*: Como exercício, usando o caso para dois conjuntos, o leitor pode deduzir o Princípio da Inclusão - Exclusão para três conjuntos:*

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

(Basta aplicar o Princípio da Inclusão-Exclusão no caso $\#(A \cup B \cup C) = \#[A \cup B) \cup C]$.

Exemplo 1.6.2 *Quantos são os números naturais menores do que ou iguais a* 1.000 *que não são múltiplos de* 3 *nem de* 7?

Solução

Lembrando: os números naturais que são múltiplos de 3 *são:* $3\times 1,\ 3\times 2,\ 3\times 3,\ 3\times 4,\ldots$. *Isto é, todo número da forma* $3n$*, onde* $n\in\mathbb{N}$.
Os números naturais que são múltiplos de 7 *são:* $7\times 1,\ 7\times 2,\ 7\times 3,\ 7\times 4,\ldots$. *Isto é, todo número da forma* $7m$*, onde* $m\in\mathbb{N}$.
Sejam T *e* S*, os conjuntos dos números naturais menores do que ou iguais a* 1.000 *que são múltiplos de três e sete, respectivamente.*
O que queremos encontrar é o número: $1.000-\#(T\cup S)$.
A idéia é usar o Princípio da Inclusão-Exclusão para encontrar o valor de $\#(T\cup S)$. *Para isso, temos que achar:* $\#T$, $\#S$ *e* $\#(T\cap S)$.
Agora, observe que:
$T=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots,\ 999\}\implies \#T=333$ *(observe que* $999=3\times 333$*)*.
$S=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ \ldots,\ 994\}\implies \#T=142$ *(observe que* $994=7\times 142$*)*.
Para encontrar o valor de $\#(T\cap S)$*, basta observar que os números naturais que são ao mesmo tempo múltiplos de* 3 *e de* 7 *são os múltiplos do Minimo Múltiplo Comum de* 3 *e* 7*. Mas,* $MMC(3,\ 7)=21$*. Logo, o conjunto dos números naturais menores do que ou iguais a* 1.000 *que são múltiplos de* 21 *é*
$(T\cap S)=\{21,\ 42,\ 63,\ 84,\ \ldots,\ 987\}\implies \#(T\cap S)=47$ *(observe que* $980=21\times 47$*)*.
Assim, $(T\cap S)=\#T+\#S-\#(T\cap S)=333+142-47=428$.
Portanto, a quantidade de números naturais menores do que ou iguais a 1.000 *que não são múltiplos de* 3 *nem de* 7 *é igual a* $1.000-428=572$.

Exemplo 1.6.3 *Se* 47% *das pessoas de uma cidade votaram numa determinada urna para governador e* 75% *votaram para senador, qual é o percentual mínimo dos que votaram para governador e senador?*
Solução

Sejam P *e* S *o conjunto das pessoas que votaram naquela urna para governador e senador, respectivamente, e* n *a quantidade total de votantes. Então:*

$$\#(P\cup S)\leq n \quad e \quad \#(P\cup S)=\#P+\#S-\#(P\cap S).$$

Assim, temos que

$$n\geq \#P+\#S-\#(P\cap S)=(47+75)\cdot\frac{n}{100}-\#(P\cap S).$$

Ou seja, $\#(P\cap S)\geq(47+75100)\cdot\frac{n}{100}=22\cdot\frac{n}{100}$*, o que significa dizer que no mínimo* 22% *votaram para governador e senador.*

Exemplo 1.6.4 *Sejam* X, Y *e* Z *conjuntos de pessoas, dois a dois disjuntos. A média de idade das pessoas nos conjuntos* X, Y, Z, $X\cup Y, X\cup Z$ *e* $Y\cup Z$ *são dados na tabela abaixo:*

Conjuntos	X	Y	Z	$X\cup Y$	$X\cup Z$	$Y\cup Z$
Média de idade das pessoas	*37*	*23*	*41*	*29*	*39,5*	*33*

Encontre a média das idades das pessoas no conjunto $X\cup Y\cup Z$.
Solução

Sejam : $\#X = x$, $\#Y = y$ *e* $\#Z = z$. *Como, por hipótese, os conjuntos são dois a dois disjuntos, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos:*

$$\#(X\cup Y) = x+y, \quad \#(X\cup Z) = x+z \quad e \quad \#(Y?Z) = y+z.$$

Agora, os dados do problema podem ser resumidos em três equações:

$$\frac{37x+23y}{x+y} = 29;$$

$$\frac{37x+41z}{x+z} = 39,5;$$

$$\frac{23y+41z}{y+z} = 33;$$

Simplificando essas equações, obtemos:

$$4x = 3y; \quad 5x = 3z, \quad 5y = 4z.$$

O que buscamos é o valor da fração

$$F = \frac{37x+23y+41z}{x+y+z}.$$

Fazendo as substituições $y = \frac{4}{3}x$; $\quad z = \frac{5}{3}$, *obtemos* $F = 34$, *que é a resposta.*

Exemplo 1.6.5 *Diga, justificando, se existe um subconjunto do conjunto dos números inteiros positivos,* S, *tal que um número está em* S *se, e somente se, ele é a soma de dois elementos distintos de* S *ou é uma soma de dois inteiros positivos que não estão em* S?
Solução

A resposta é sim.
Tome $S = \mathbb{N} - \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 10\} = \{3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ \ldots\}$.
Cada um dos números $3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11$ *e* 12 *é uma soma de dois números que não estão no conjunto* S:

$$3 = 1+2; \quad 5 = 4+1; \quad 6 = 2+4; \quad 8 = 7+1; \quad 9 = 2+7; \quad 11 = 4+7; \quad 12 = 10+2.$$

Agora, observe que: $13 = 8+5$, *com* $8,5 \in S$ *e qualquer número* n *maior do que* 13 *tem a forma* $n = 3+(n-3)$, *com* $3 \in S$ *e* $(n-3) \in S$, *para* n *maior do que* 13. *Por outro lado,*

nenhum dos números $1,\ 2,\ 4,\ 7$ *ou* 10 *é soma de números que estão em* S *ou de números que não estão em* S*. Portanto, o conjunto existe.*
É fácil ver que a solução é única, desde que 1 *não pode estar em* S*,* 2 *não pode estar em* S*,* 3 *tem de estar em* S*, e assim por diante.*

Exemplo 1.6.6 *Escreva uma tabela para o conjunto* $\mathbb{P}(X)$ *com a operação diferença simétrica,* Δ*, quando* $X = \{a,\ b\}$*.*
Solução

Lembrando: $M\ \Delta\ N = (M-N)\cup(N-M)$ *e* $\mathbb{P}(X) = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}$*. Aplicando a operação dada, é fácil ver que a tabela será:*

Δ	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

Observe que, com a operação Δ*, todo elemento* Y*, de* $\mathbb{P}(X)$ *satisfaz a equação:* $Y^2 = \emptyset$*, onde* Y^2 *significa* $Y\ \Delta\ Y$*.*

Exemplo 1.6.7 *(**Lewis Carrol**)*[2] *Olhando prisioneiros que retornavam de uma guerra observou-se que, no mínimo* 70% *tinham perdido um olho,* 75% *tinham perdido uma orelha,* 80% *um braço,* 80% *uma perna.*
No mínimo, que percentagem dos prisioneiros tinha perdido todos os órgãos citados?
Solução

Sejam S *o conjunto de todos os prisioneiros,* E *o conjunto de todos os prisioneiros que perderam um olho,* H *a coleção de todos os que perderam uma orelha,* A *o conjunto dos que perderam um braço e* L *a coleção do que perderam uma perna.*
Vamos supor que $\#S = 100$*. Queremos calcular* $\#(E\cap H\cap A\cap L)$*, que corresponde a quantidade dos infelizes que perderam todos os quatro órgãos.*
Agora, observe que $S \supset E\cup H$*. Portanto, podemos escrever:*

$$100 = \#S \geq \#(E\cup H) = \#E + \#H - \#(E\cap H) = 70+75-\#(E\cap H).$$

Portanto, $\#(E\cap H) \geq 70+75-100 = 45$*.*
De maneira análoga, podemos obtemos que $\#(N\cap L) \geq 65$*. Como* $S \supset (E\cap H)\cup(A\cap L)$*,*

[2]**Charles Lutwidge Dodgson** (1832 - 1898), mais conhecido pelo seu pseudônimo **Lewis Carroll**, escritor inglês , matemático , lógico , diácono Anglicano , e fotógrafo. Entre suas obras mais conhecidas está o conto **Alice no País das Maravilhas**. Ficou conhecido também por sua facilidade no jogo de palavras , a lógica e a fantasia. O problema do exemplo encontra-se na sua obra A Tangled Tale.

temos:

$$100 = \#S \geq \#[(E \cap H) \cup (A \cap L)] = \#(E \cap H) + \#(A \cap L) - \#(E \cap H \cap A \cap L) \implies \#(E \cap H \cap A \cap L) \geq 10.$$

Portanto, a resposta é 10%.

Problemas

1. *Sejam* A, *e* B *subconjuntos de um conjunto* X. *Sob que condições cada uma das igualdades abaixo é verdadeira?*
   (i) $A \cup (B \cap A) = A$.
   (ii) $A \cup B = A \,\Delta\, B \,\Delta\, (A \cap B)$.
   (iii) $A \,\Delta\, (B \cup C) = (A \,\Delta\, B) \cup (A \,\Delta\, C)$.

2. *Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:*
   (i) $\mathbb{P}(X) \cup \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X \cup Y)$ *(ii)* $\mathbb{P}(X) \cap \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X \cap Y)$

3. *Uma centena de estudantes respondeu um questionário sobre seus hábitos de estudo.* 70 *deles disseram que algumas vezes estudaram durante o dia,* 55 *responderam que algumas vezes estudaram a noite, e* 45 *que algumas vezes estudaram durante os fins de semana. Também* 36 *estudantes responderam que estudaram durante o dia e a noite,* 24 *durante o dia e nos fins de semana,* 17 *durante a noite e nos fins de semana, e* 3 *durante o dia, a noite e em fins de semana.*
   Quantos estudantes não estudaram em qualquer período?

4. *Se* $\#A = 3$ *e* $\#B = 5$, *quais são as possibilidades para* $\#(A \cup B)$*?*

5. *Considere os conjuntos*

   $$\{1\},\ \{2,\ 3\},\ \{4,\ 5,\ 6\},\ \{7,\ 8,\ 9,\ 10\},\ \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\},\ \ldots$$

   Seja S_n *a soma dos elementos do* $n-$*ésimo conjunto. Calcule* S_{30}.

6. *Existem quantos inteiros positivos de* 1 *até* 1.000.000 *que não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?*

7. *Quantos inteiros de* 1 *até* 10^{30} ***não*** *são quadrados perfeitos, cubos perfeitos nem potências quíntuplas de qualquer inteiro?*

8. *Seja* A *um conjunto finito qualquer e* B *um subconjunto de* A. *Prove que a quantidade de subconjuntos de* A *contendo* B *é igual ao número de subconjuntos de* A *que são disjuntos com B.*

9. *Seja* $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 360, 361\}$. *Achar o menor inteiro positivo* p *tal que todo subconjunto de* E *com* p *elementos possui três inteiros consecutivos.*

Capítulo 2

Funções

2.1 O Conceito de Função

O canto dos grilos é um som familiar no campo numa noite quente. O ritmo no qual os grilos cantam depende da temperatura: quando está quente, eles cricrilam mais do que em qualquer outro tempo. A tabela abaixo mostra como o ritmo e a temperatura estão relacionados, onde a temperatura está expressa em graus Farenheit [1]

Temperatura em Graus Farenheit	*50*	*60*	*70*	*80*	...
Quantidade de cricrilos em 15 segundo	*10*	*20*	*30*	*40*	...

Para cada temperatura desta tabela, existe um correspondente número de cricrilos em quinze segundos. Observe que, para cada temperatura existe um único número correspondente. Um matemático diria que o número de cricrilos em quinze segundos é uma ***função*** *da temperatura.*

Uma maneira de representar uma função é por meio de uma tabela, como acima, onde cada elemento da primeira linha corresponde a ***um único*** *elemento na segunda linha. Uma outra maneira é escrever uma fórmula. Na tabela acima, cada número da segunda linha é o correspondente número da primeira linha menos* 40. *Se chamamos* F *a temperatura em graus Fahrenheit e* n *representa o número de cricrilos em* 15 *segundos, podemos escrever:*

$$n = F - 40 \quad ou \quad F = n + 40.$$

As duas letras nas fórmulas acima são variáveis. Na primeira, n *muda de acordo com a variação de* F*, isto é,* n *é função de* F. *Na segunda fórmula,* F *varia de acordo com a variação de* n*, isto é,* F *é função de* n.

A fórmula de uma função permite-nos escrever a correspondente tabela. Basta escrever os números que queremos para a primeira linha e substituí-los na fórmula para achar o número correspondente da segunda linha. Por exemplo, uma fórmula para a temperatura em graus Celsius, C*, como uma função do ritmo do canto dos grilos em* 15 *segundos,* n*, é dada por*

$$C = 0,6n + 4.$$

[1] O **grau fahrenheit** (símbolo: ^oF) é uma escala de temperatura proposta, em 1724, por Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-736), físico, engenheiro e soprador de vidro alemão, que inventou o termômetro de mercúrio, em 1714. Nesta escala:

- o ponto de fusão da água (0^oC) é de 32^oF.
- o ponto de ebulição da água (100^oC) é de 212^oF.

Esta escala foi utilizada principalmente pelos países que foram colonizados pelos britânicos, mas seu uso atualmente se restringe a poucos países de língua inglesa, como os Estados Unidos e Belize. E também, muito utilizada com o povo grego, para medir a temperatura de um corpo. A relação entre graus Farenheit, F, e graus Celsius, C, é dada pela equação: $F = C \times 1,8 + 32$.

Para ver isso, basta observar que $F = C \times 1,8 + 32$. *Como:*

$F = n+40$, *temos*: $Cx1,8+32 = n+40$, *ou* $C \times 1,8 = n+40-32 = n+8$, *ou ainda*: $C = 0,6n+4 \quad (*$

Para escrever a tabela dessa função, escolhemos alguns números $n = 0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$ *e substituímos então esses números na fórmula* $(*)$ *acima, para encontrar os correspondentes números de segunda linha:*
Substituindo $n = 0$, *obtemos* $C = 0,6 \times 0 + 4 = 4$*;*
Substituindo $n = 10$, *obtemos* $C = 0,6 \times 10 + 14 = 10$*;*
Substituindo $n = 20$, *obtemos* $C = 0,6 \times 20 + 14 = 16$*;*
Substituindo $n = 30$, *obtemos* $C = 0,6 \times 30 + 4 = 22$*;*
Substituindo $n = 40$, *obtemos* $C = 0,6 \times 40 + 4 = 28$.
A tabela é :

Temperatura em Graus Celsius	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	...
Quantidade de cricrilos em 15 segundo	*4*	*10*	*16*	*22*	*28*	...

Definição
Dados dois conjuntos S *e* T, *uma* ***função ou aplicação*** *de* S *em* T, *é uma correspondência (ou regra, ou mecanismo) entre os elementos dos dois conjuntos, que associa a cada elemento do conjunto* S ***um único*** *elemento do conjunto* T.
O conjunto S *é usualmente chamado de* ***domínio da função*** *e o conjunto* T *é chamado de* ***contradomínio***.

2.2 Notação e Vocabulário

No capítulo anterior, discutimos vários aspectos da teoria dos conjuntos: notação, elementos, operações etc. Neste capítulo, vamos olhar para os conjuntos sob um outro ponto de vista, buscando estabelecer correspondências entre os elementos de dois (ou mais) conjuntos. Ou seja, cuidaremos de aplicações de um conjunto noutro. Por quê esse olhar diferente? Por que assim poderemos descrever muitos fenômenos, situações e fatos matemáticos relevantes usando o conceito de função (ou aplicação), que é um dos mais fundamentais de toda a Matemática.

A seguir, para facilitar nossa comunicação, introduziremos algumas notações e palavras técnicas que nos facilitam o olhar sobre as correspondências entre conjuntos.

Seja f *uma função de um conjunto* S *para um conjunto* T. *Notamos este fato como:*

$$f : S \longrightarrow T$$

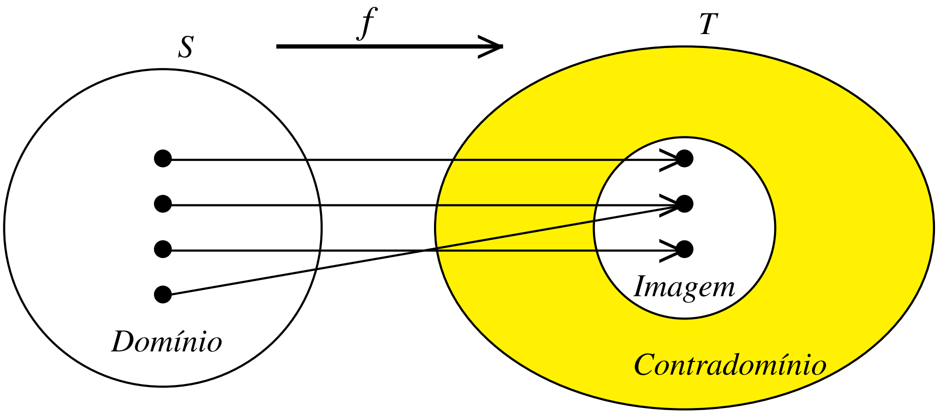
*Se s é um elemento do conjunto S e $t \in T$ é o elemento que está associado, pela função f, ao elemento $s \in T$, notamos este fato por: $t = f(s)$. Chamamos t de **a imagem de** s **pela função** f.*
Dizemos também que o elemento $t \in T$ é o valor que a função f assume em s, ou que f leva s em t. Chamamos o conjunto

$$Imf = \{t \in T | \text{existe } s \in S;\ f(s) = t\}$$

*de **imagem da função f**.*

A imagem de uma função é um subconjunto do contradomínio.

Para facilitar o entendimento, costuma-se usar diagramas e gráficos como visto a seguir.



***Exemplo 2.2.1** Seja S o conjunto das pessoas que moram na rua A e seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Se s é um dos residentes da rua A, definimos $f(s)$ como sendo o número da residência de s na rua A. Portanto, se o Sr. Silva mora na casa de número 25 da rua A, então $f(\text{Sr. Silva}) = 25$. Observe que, se Maria é a esposa do Sr. Silva, morando na mesma casa que ele, então $f(\text{Maria}) = 25$. Assim, a correspondência*

$$f : S \longrightarrow \mathbb{N}$$

*define uma função, porque cada morador está associado a um **único** número.*

***Exemplo 2.2.2** Consideramos o conjunto S das pessoas residentes na rua A e $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais. Suponha que o sistema de identificação da polícia seja perfeito (duas pessoas não podem ter a mesma identificação), de modo que cada pessoa tenha sua carteira de identidade com o respectivo número, independente se é homem, mulher ou criança. Definimos a função*

$$g : S \longrightarrow \mathbb{N}$$

por $g(s) =$ *número da carteira de identidade da pessoa s.*
Pelas nossas hipóteses, quaisquer duas pessoas distintas, s_1 *e* s_2*, são tais que* $g(s_1) \neq g(s_2$.

Observe então que, esta correspondência g *definida aqui é uma função que possui um aspecto importante e que se diferencia da função do exemplo anterior: lá dois elementos distintos podem ter a mesma imagem, como foi o caso* $f(\text{Sr. Silva}) = f(Maria) = 25$. *Aqui, no caso da função* g, *ocorre que quaisquer dois elementos de* S, *distintos, têm sempre imagens distintas. Nesse caso, dizemos, então, que g é uma função* ***injetiva***.

Definição
Uma função $f : S \longrightarrow T$ *é dita* ***injetiva*** *se, sempre que* $s_1, s_2 \in S$, *com* $s_1 \neq s_2$, *temos* $f(s_1) \neq f(s_2$.
Ou, equivalentemente, dizemos que f *é* ***injetiva*** *se, e somente se, para todo* $s_1, s_2 \in S$: $f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$.

Exemplo 2.2.3 *A função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$ ***não*** *é injetiva.*
De fato, $2 \neq -2$, *mas temos* $f(2) = 4 = f(-2)$. *Para qualquer* $x \in \mathbb{R}$, *com* $x \neq 0$, *temos* $f(x) = f(-x) = x^2$.

Observação
Observe que, se modificarmos o domínio, podemos transformar uma função, que não é injetiva, numa injetiva, mantendo a mesma lei de correspondência. Por exemplo:

$$g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \textit{ tal que } f(x) = x^2, \textit{ é injetiva}.$$

Exemplo 2.2.4 *Sejam* $\mathbb{Z}^+$ *o conjunto dos números inteiros positivos e* T *a coleção dos números inteiros positivos ímpares. Definimos*

$$f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow T$$

por $f(n) = 2n - 1$, *para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.
Assim, temos: $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$;
$f(10) = 2 \cdot 10 - 1 = 20 - 1 = 19$;
$f(35) = 2 \cdot 35 - 1 = 70 - 1 = 69$.
Portanto, é fácil ver que a correspondência f *define uma função de* $\mathbb{Z}^+$ *em* T *e observe que, como no exemplo da observação acima,* f *distingue os elementos de* $\mathbb{Z}^+$, *isto é, se* $n \neq m$, *então* $f(n) \neq f(m)$.
Logo, f *é injetiva, pois, se* $f(n) = f(m)$, *então* $2n - 1 = 2m - 1$, *o que nos levaria a conclusão de que* $n = m$.

Vamos mostrar a seguir que a função f do exemplo acima possui uma propriedade que nenhuma das funções dos exemplos anteriores possui.

De fato, seja x qualquer número inteiro positivo ímpar. Podemos escrever x como sendo $x = 2r - 1$, para algum inteiro positivo r. Agora, $f(r) = 2r - 1 = x$. Isto significa dizer que qualquer elemento do contradomínio T é a imagem de um elemento de $\mathbb{Z}^+$.

Se uma função f possui esta propriedade, dizemos que f é uma função ***sobre ou sobrejetiva****.*

Definição
Uma função $f : S \longrightarrow T$ é ***sobre*** *se, para qualquer elemento do contradomínio $t \in T$, existe um elemento do domínio $s \in S$ tal que $f(s) = t$.*

Uma ***função é sobre*** *quando a* ***imagem é igual ao contradomínio****.*

Exemplo 2.2.5 *Para qualquer conjunto não vazio S podemos definir a correspondência*

$$i : S \longrightarrow S, \text{tal que } i(s) = s, \text{ para cada } s \in S.$$

Esta função aplica cada elemento de S ***sobre*** *ele próprio. A função i é chamada* ***função identidade****. É comum notar a função identidade $i : S \longrightarrow S$ por i_s.*

É fácil ver que a ***função identidade é injetiva e sobre****.*

Desafio
Definimos a correspondência $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ por:
(i) $f(n) = 1$, se n é um número inteiro negativo;
(ii) $f(0) = 101$;
(iii) $f(n) = n$, se n é número inteiro positivo.
Diga, justificando, se a função f é injetiva? É sobre?

Exemplo 2.2.6 *A função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^3$ é uma função injetiva e sobre.*
Solução

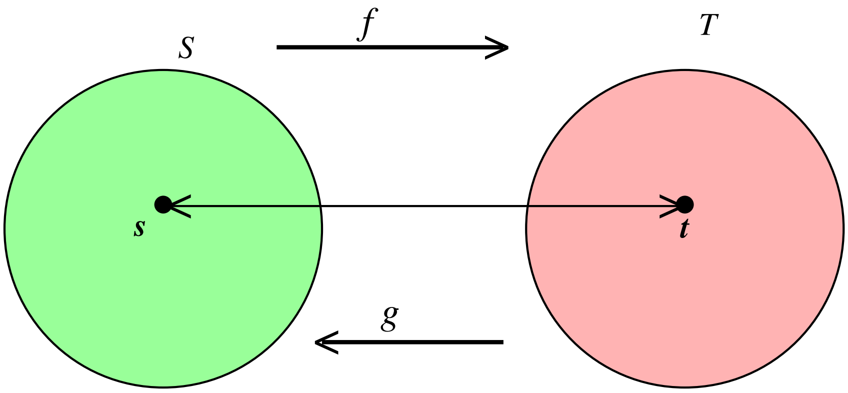
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Observe que $h(x) = h(y) \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y^3} \Rightarrow x = y$. Portanto, h é uma função injetiva.

Se $y \in \mathbb{R}$ *(no contradomínio), existe* $\sqrt[3]{y}$ *no domínio* $\mathbb{R}$*, tal que* $h(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$*. (Aqui usamos o fato de que todo número real admite uma raiz cúbica. Em se tratando de raiz quadrada este fato não é verdadeiro. Nenhum número real negativo possui raiz quadrada). Portanto, a função* h *é sobre.*

Dados dois conjuntos S *e* T *e uma função* $f : S \longrightarrow T$ *tal que* f *seja injetiva e sobre. Nesse caso,* f *é chamada uma* ***função bijetiva*** *ou uma* ***bijeção****.*

Essa definição sugere uma certa simetria em relação ao fato de ser bijetiva. Isto é, a definição fala de uma função bijetiva de S *para* T*. Mas, neste caso, também existe uma função bijetiva de* T *para* S *e essa função será chamada de* ***a inversa de*** f*, sendo usualmente denotada por* f^{-1}*.*

Vamos mostrar em seguida que, se a correspondência $f : S \longrightarrow T$ *é uma função bijetiva, então existe uma correspondência* $g : T \longrightarrow S$*, que é também bijetiva (que é a inversa de* f*).*



De fato, como f *é bijetiva, em particular* f *é sobre. Logo, dado qualquer elemento* t *de* T*, existe algum* s *de* S *tal que* $f(s) = t$*. Como* f *é também injetiva,* s *é único; isto é,* s *é o único elemento de* S *com a propriedade de que* $f(s) = t$*. Ou seja, não existe ambigüidade, portanto, em levarmos* t *naquele elemento* s *tal que* $t = f(s)$*. Esse elemento* s *será chamado* $g(t)$*.*
Essa regra associa cada elemento de T *num único elemento de* S*, em outras palavras, define uma função* $g : T \longrightarrow S$*, veja Figura acima. Esta função é chamada* ***a inversa de*** f *e é comumente denotada por* f^{-1}*.*

Exemplo 2.2.7 *Seja* $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tal que* $g(s) = s - 6$*. É fácil ver que* g *é injetiva e sobre. Qual é a inversa de* g*?*
Solução

Para responder a questão, considere t *um elemento de* $\mathbb{Z}$*. Sabemos que* $g^{-1}(t) = x$*, tal que* $g(x) = t$*. Mas,* $g(x) = x - 6 = t$*. Portanto,* $x = t + 6$*. Assim,* $g^{-1}(t) = t + 6$*, para todo* $t \in \mathbb{Z}$*.*

Exemplo 2.2.8 *Na expressão* $\frac{x+1}{x-2}$ *não podemos atribuir o valor* 2 *para x, pois teríamos* $\frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0}$ *que não é qualquer número real (ou complexo). Assim, para que a fórmula* $\frac{x+1}{x-2}$ *possa representar uma função teríamos de eliminar a possibilidade de x vir a ser* 2*.*
Desse modo, $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ *é uma função bem definida. Neste caso,* $\mathbb{R} - \{2\}$*, o conjunto de todos os números reais com exceção do* 2*, é o domínio da função* f *e* $\mathbb{R}$ *é o contradomínio.*
Uma questão adicional: f é injetiva?
Sim. De fato, para cada $x, y \in \mathbb{R} - \{2\}$*, com* $x \neq y$*, a igualdade* $f(x) = f(y)$ *significa dizer que* $\frac{x+1}{x-2} = \frac{y+1}{y-2}$ *, ou seja,* $(x+1)\cdot(y-2) = (x-2)\cdot(y+1)$*, ou ainda* $3x = 3y$*, que resulta em* $x = y$*, que é uma contradição. Logo,* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *e a função é injetiva.*
f é sobre?
Não. Pois não existe $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(s) = 1$*. De fato, se* $1 = f(s) = \frac{s+1}{s+3}$*, teríamos* $s + 1 = s + 3$*, o que implicaria* $3 = 0$*, que é uma contradição.*

Observação
Agora considere $g : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$*, tal que* $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$*. Pelo que vimos acima,* g *é injetiva e sobre.*
Quem é a inversa de g?
Fazendo $g(x) = \frac{x+1}{x-2} = y \Rightarrow x + 1 = y(x-2) \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$*. Portanto,* $g^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-1}$*.*

Outra questão: *quando podemos dizer que duas funções* f *e* g *são iguais?*

Duas funções f *e* g *são iguais se:*

- *f e g são definidas em um mesmo conjunto* A *(que é o domínio);*
- $f(x) = g(x)$*, para todo* x *do domínio, isto é, a lei ou fórmula das duas funções tem de produzir os mesmos valores, quando* x *varia no conjunto* A*;*
- *Os valores* $f(x)$*,* $g(x)$ *pertencem a um mesmo conjunto* B *(o contradomínio, que é o mesmo para as duas funções).*

Exemplo 2.2.9 *Se* $f(x) = \sqrt{x^2}$ *e* $g(x) = x$*, podemos concluir que* $f = g$*? O que dizer de* $H(x) = x$ *e* $V(x) = \frac{x^2}{x}$*?*
Solução

*A resposta à primeira pergunta é **não**. Lembrando: uma das condições para que duas funções sejam iguais é que $f(x) = g(x)$, para todo x do domínio. No caso, o domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Mas, por exemplo, $f(-2) = 2$ e, no entanto, $g(-2) = -2$. A resposta à segunda questão é **não**, pois o domínio da função H é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o domínio da função V é o conjunto dos números reais não nulos.*

Exemplo 2.2.10 *Sejam $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos e a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. É fácil ver que a função f é injetiva e sobre. Quem é f^{-1}?*
Solução

Vamos mostrar um fato surpreendente: $f(x) = f^{-1}(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $f = f^{-1}$.
De fato, seja $f^{-1}(x) = s$, tal que $f(s) = x$. Mas, $f(s) = \frac{1}{s} = x$. Logo, $f^{-1}(x) = s = \frac{1}{x} = f(x)$.

Exemplo 2.2.11 *Encontre quantas funções podemos definir tendo dominio o conjunto $\{a,b\}$ e cujo contradomínio seja o conjunto $\{c,d\}$.*
Solução

Existem $2^2 = 4$ funções: f_1, f_2, f_3, f_4 dadas por:

- *f_1 dada por $f_1(a) = f_1(b) = c$. Observe que neste caso o conjunto imagem da função é: $Imf_1 = \{c\}$.*
- *f_2 dada por $f_2(a) = f_2(b) = d$. Observe que neste caso o conjunto imagem da função é: $Imf_2 = \{d\}$.*
- *f_3 dada por $f_3(a) = c, f_3(b) = d$. Observe que neste caso o conjunto imagem da função é: $Imf_1 = \{c,d\}$.*
- *f_4 dada por $f_4(a) = d, f_4(b) = c$. Observe que neste caso o conjunto imagem da função é: $Imf_1 = \{c,d\}$.*

Se A possui n elementos e B possui m, o número de funções de A em B é m^n.

2.3 Funções Compostas

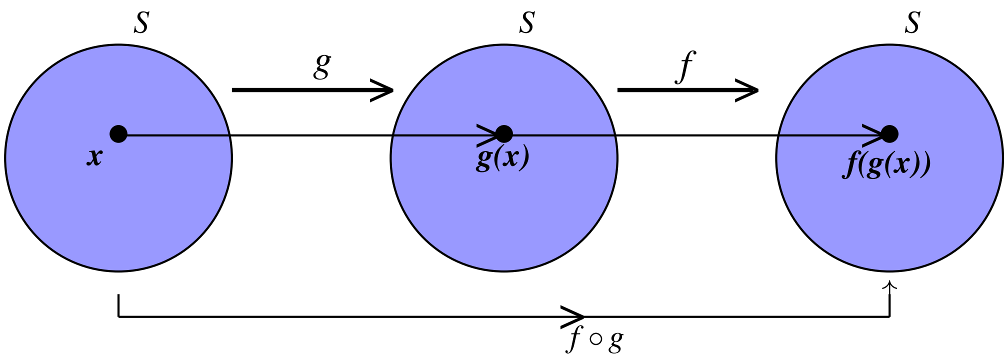
No estudo de funções tem um caso muito interessante, que vale a pena estudar pela sua oportunidade de generalização e conseqüente utilidade.

Sejam S um conjunto e f, g duas funções definidas de S para S, isto é,

$$f,\, g\ :\ S \longrightarrow S.$$

Se $s \in S$, então $g(s) \in S$ e, como elemento de S, pode ser aplicado pela função f, resultando no elemento $f(g(s)) \in S$. A partir dessa observação, podemos definir a chamada ***função composta****, notada por $f \circ g$, definida como*

$$f \circ g\ :\ S \longrightarrow S,\ tal\ que\ (f \circ g)(x) = f(g(x)),\ para\ cada\ x \in S.$$



Exemplo 2.3.1 *Sejam $f, g\ :\ R \longrightarrow R$, tal que $f(s) = 5s + 6$ e $g(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Observe que podemos calcular $(f \circ g)(s) = f(g(s)) = f(\frac{1}{s^2+1}) = 5 \cdot \frac{1}{s^2+1} + 6 = \frac{6s^2+1}{s^2+1}$.*

Se, em vez de $(f \circ g)(s)$, calculássemos $(g \circ f)(x)$, o valor seria o mesmo?
A resposta é ***não****!*
De fato, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x+6) = \frac{1}{(5x+6)^2+1}$, que é distinto de $(f \circ g)(s) = \frac{6s^2+1}{s^2+1}$.

Para exemplificar:

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 5.1 + 6 = 11 \quad e \quad (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(6) = \frac{1}{6^2+1} = \frac{1}{37}.$$

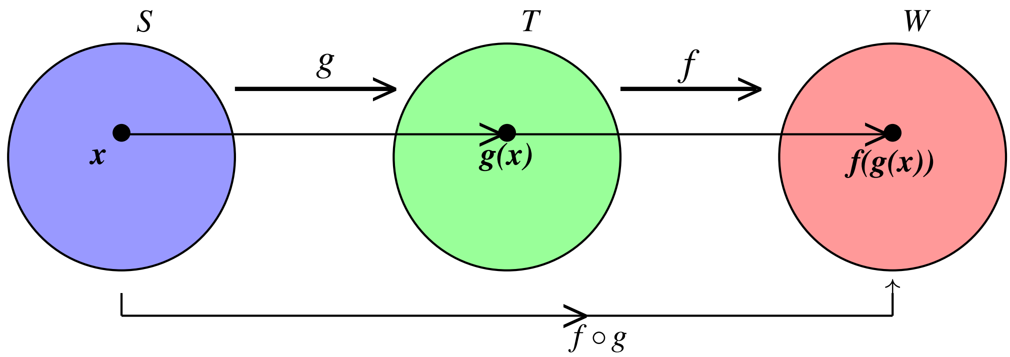
Observe, então, que $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, ***a composição de funções é uma operação que não é comutativa****.*

O que estudamos sobre a função composta ou composição de funções pode ser generalizado para o caso em que temos duas funções

$$g\ :\ S \longrightarrow T \quad e$$

$$f\ :\ T \longrightarrow W.$$

Nesse caso, podemos definir a função composta g



Observe que agora não faz sentido falarmos em $g \circ f$, *a menos que* S *seja igual a* W, *pois* g *está definida de* S *para* T *e não de* W *para* T, *isto é, como* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *e* $f(x) \in W$, *não podemos aplicar a função* g *num elemento do conjunto* W, *a menos que* $W = S$, *pois o domínio de* g *é* S.

Exemplo 2.3.2 *Sejam* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$ *e* $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sqrt{x}$. *Calcule* $(g \circ f)(x)$. *É possível calcular* $(f \circ g)(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^+ \cup 0$?
Solução

Observe que a imagem da função f *é:*

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} \mid existe\ x \in \mathbb{R}\ tal\ que f(x) = y\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Neste caso, chamando $D_g =$ *domínio de* g, *é sempre possível calcular* $g(f(x))$, *pois* $Im\ f \subset D_g$ *(aqui,* $Imf = D_g$*).*
Logo, $g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{x^2} = |x|$.
Por exemplo, $g(f(-2)) = g[(-2)^2] = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$. *Do mesmo modo,* $g(f(3)) = g[(3)^2] = \sqrt{(3)^2} = |3| = 3$.
No caso da segunda questão, temos que o $Im\ g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, *que é um subconjunto do domínio da função* f. *Portanto, é possível calcular* $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^+ \cup 0$.

Observação
Seja $f : S \longrightarrow T$ *uma aplicação injetiva de* S *sobre* T. *Portanto, como vimos, podemos definir a inversa da função* f, *que notamos por* f^{-1} *e é uma aplicação de* T *em* S.

Uma pergunta: Que função resultará da composição $f^{-1} \circ f$?

Se $s \in S$, *então* $(f^{-1} \circ f)(s) = f^{-1}(f(s))$. *Entretanto, pela definição de* f^{-1}, *se* $t = f(s)$, *então* $f^{-1}(t) = s$. *Em outros palavras,* $(f^{-1} \circ f)(s) = f^{-1}(f(s)) = f^{-1}(t) = s$. *Ou seja,* $(f^{-1} \circ f)(s) = s$, *para todo* $s \in S$. *Isto significa dizer que* $(f^{-1} \circ f) = i_S$, *que é a aplicação identidade de* S *sobre ele próprio.*

De modo análogo, para cada $t \in T$, *temos* $(f \circ f^{-1})(t) = t$. *Ou seja,* $(f \circ f^{-1}) = i_T$, *que é a identidade de* T *sobre ele próprio.*

Essas duas relações, $f \circ f^{-1} = i_T$ *e* $f^{-1} \circ f = i_S$, *facilitam o entendimento de que* $f^{-1} : T \longrightarrow S$ *é uma aplicação injetiva e sobre.*

De fato, suponha que $f^{-1}(t_1) = f^{-1}(t_2)$, *com* $t_1, t_2 \in T$. *Aplicando* f *em cada lado da igualdade obtemos:* $f(f^{-1}(t_1) = f(f^{-1}(t_2))$, *que é a mesma coisa de :*

$$(f \circ f^{-1})(t_1) = i_T(t_1) = t_1 = (f \circ f^{-1})(t_2) = i_T(t_2) = t_2.$$

Portanto, a função f^{-1} *é, de fato, injetiva.*
Por que f^{-1} *é sobre?*
Seja $s \in S$, *queremos exibir algum elemento* $t \in T$ *tal que* $s = f^{-1}(t)$. *Para isso, se* $t = f(s)$, *então* $f^{-1}(t) = f^{-1}(f(s)) = (f^{-1} \circ f)(s) = i_S(s) = s$. *Portanto,* f^{-1} *é sobre.*

As aplicações identidades i_S, i_T *têm algumas propriedades algébricas importantes, que comentaremos a seguir.*
Sejam $f : S \longrightarrow T$ *e* $i_T : T \longrightarrow T$, *a aplicação identidade de* T. *Pelas definições de* f *e* i_T, *é possível falar na composta* $i_T \circ f$.
O que significa $i_T \circ f$? *Se* $s \in S$, *então* $(i_T \circ f)(s) = i_T(f(s)) = f(s)$. *Ou seja,* $(i_T \circ f)(s) = f(s)$, *para todo* $s \in S$. *Isto significa que* $i_T \circ f = f$. *De maneira análoga, podemos ver que* $f \circ i_S = f$.
Agora, se $S = T$, *temos* $i_S = i_T = i$. *Assim,* $i \circ f = f \circ i = f$, *onde* $i = i_S = i_T$.

Exemplo 2.3.3 *Suponha que temos a situação :* $g : S \longrightarrow T$ *e* $f : T \longrightarrow W$ *e que nessas condições, possamos definir :* $f \circ g : S \longrightarrow W$.
(i) Se f *e* g *são injetivas, então* $f \circ g$ *é injetiva?*
(ii) Se f *e* g *são sobrejetivas, então* $f \circ g$ *é sobre?*
Solução

A resposta é afirmativa para ambas as questões.
(i) Suponha que as funções $g : S \longrightarrow T$ *e* $f : T \longrightarrow W$ *são injetivas. Sejam* $s_1, s_2 \in S$, *tais que:* $(f \circ g)(s_1) = (f \circ g)(s_2)$. *Queremos saber se, de fato, temos* $s_1 = s_2$. *Para responder, observamos que:*

$$(f \circ g)(s_1) = (f \circ g)(s_2) \iff f(g(s_1)) = f(g(s_2)).$$

Como f *é injetiva, temos que* $g(s_1) = g(s_2)$. *Como* g *é injetiva, temos que* $s_1 = s_2$. *Logo,* $f \circ g$ *é injetiva.*
(ii) Suponha que ambos as funções $g : S \longrightarrow T$ *e* $f : T \longrightarrow W$ *são sobrejetivas. Queremos mostrar que dado* $w \in W$, *existe* $s_o \in S$, *tal que* $(f \circ g)(s_o) = w$.
Como f *é sobre, existe* $t_o \in T$ *tal que* $f(t_o) = w$. *Agora, como a função* $g : S \longrightarrow T$ *é sobre, existe* $s_o \in S$ *tal que* $g(s_o) = t_o$. *Mas, então:* $(f \circ g)(s_o) = f(g(s_o)) = f(t_o) = w$. *Portanto,* $f \circ g$ *é sobre.*

Observação
Os dois resultados acima permitem-nos afirmar que: Se $g : S \longrightarrow T$ *e* $f : T \longrightarrow W$ *são ambas injetiva e sobre , então* $f \circ g : S \longrightarrow W$ *é injetiva e sobre.*

Problemas

(1) *Considere a função* $f : R \longrightarrow R$ *dada por* $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
(a) Existem valores de x *para os quais temos* $f(x) = \frac{7}{3}$? *Em caso afirmativo, quais?*
(b) Existem valores de x *para os quais temos* $f(x) = 4$? *Em caso afirmativo, quais?*
(c) Determine o conjunto imagem da função dada.

(2) *Determine o maior subconjunto dos números reais que serve como domínio para a função* $F(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{3 - x}}$.

(3) *Seja* $g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$.
(i) Ache o conjunto imagem da função g. *(ii)* g *é injetiva?* *(iii)* g *é sobre?*

(4) *Um barbante de comprimento* a *é cortado em três partes: uma tem comprimento* x *e as outras têm comprimentos iguais. Unindo as pontas de cada uma dessas partes, constroem-se três círculos. Seja* $S(x)$ *a soma das áreas dos três círculos assim determinados.*
(i) Calcule S *em função de* x.
(ii) Identifique o maior subconjunto dos números reais que serve como domínio para $S(x)$.
(iii) Faça o gráfico da função $y = S(x)$. *(NOTA: O gráfico da função* S *é o conjunto* $G_S = \{x, y) \mid y = S(x))$.
(iv) Identifique o conjunto imagem de $S(x)$.

(5) *Seja* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. *Considere a função* $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup 0$, *tal que:*

- $g(n) = 0$, *se o dígito das unidades de* n *for* 3;
- $g(10) = 0$;
- $g(m.n) = g(m) + g(n)$.

(i) Calcule $g(2)$. *(ii) Calcule* $g(1991)$ $eg(2008)$.
(iii) Escreva uma expressão para $g(n)$.

(6) *A função* f *dá a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio em função do tempo t, decorrido a partir de zero hora.*
(a) Exprima $f(t)$ *em função de* t. *(b) Esboce o gráfico da função* $y = f(t)$.

(7) *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tais que* $f(x) \cdot f(y) - f(x \cdot y) = x + y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

(8) *Sejam* a, b *números reais quaisquer e* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = x^2 + a \cdot x + b$.
(i) A função f é injetiva? *(ii) f é sobre?*

(9) *Seja* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $h(x) = |x| - 1|$.
(i) h é uma função? *(ii) h é injetiva?* *(iii) h é uma função sobre?*
(iv) Esboce no plano cartesiano o gráfico dos pontos $(x, f(x))$.

(10) *Seja A um conjunto com n elementos. Existem quantas bijeções* $f : A \longrightarrow A$?

(11) *Sejam* $f(x) = x^2 + 3x + 2$ *e* $S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 25\}$. *Em S, existem quantos elementos s para os quais* $f(s)$ *deixa resto zero quando dividido por* 6?

(12) *Seja uma função definida para todo x real, satisfazendo as condições:*

$$\begin{cases} f(3) & = & 2 \\ f(x+3) & = & f(x) \cdot f(3 \end{cases}$$

Ache o valor de f(-3).

(13) *Dada uma constante C, ache todas as funções f tais que*

$$f(x) + C \cdot f(x-2) = (x1)^3,\ para\ todoxin\mathbb{R}.$$

(14) *Seja* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *tal que* $f(1) = 1$ *e* $f(n) = n + f(n-1)$, *para todo número natural* $n \geq 2$. *Encontre o valor de* $f(2016)$.

(15) *Seja* $f(n)$ *a expressão da soma dos n primeiros termos da seqüência:*

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ ,\ r,\ r,\ (r+1),\ (r+1),$$

Ache os valores de f(2015) e f(2016).

(16) *Determine a função* $h(x)$ *que satisfaz a seguinte equação:*

$$x^2 h(x) + h(1x) = 2xx^4.$$

(17) *Uma função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz:*

$$f(2-x) = f(2+x) \qquad e \qquad f(7+x) = f(7-x)$$

para todo número real x. Se $x = 0$ *é uma raiz da equação* $f(x) = 0$, *qual é o menor número de raízes da equação* $f(x) = 0$ *no intervalo* $-1000 \leq x \leq 1000$?

Capítulo 3

Bibliografia

[1] BERZSENYI, G.; MAUER, S. B. - The Contest Problem Book V, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, No. 38, Washington. 1997

[2] GILBERT, W - Modern Algebra with Applications, John Wiley Sons, New York. 1976

[3] HERSTEIN, I. N.; KAPLANSKY, I. - Matters Mathematical, Chelsea Publishing Company. New York, N. Y. 1978

[4] JACOBS, HAROLD R. Mathematics, a Human Endeavor. W. H. Freeman and Company. 1970

[5] MONTEIRO, L. H. J. - Iniciação às Estruturas Algébricas, Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM, Série Professor No 06, São Paulo. 1968

[6] Olimpíadas Paulista de Matemática de 1977 a 1997 Questões e Soluções. 2o Grau. Publicação ACIESP no 105. 2a Edição. 1999

[7] ROSS, KENNETH A. Discrete Mathematics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1985