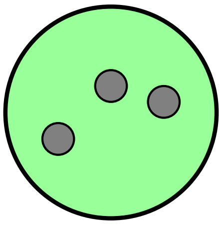
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 01 - Data 01/02/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

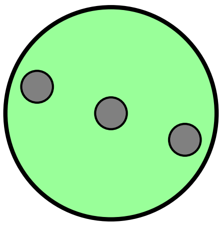
Zizi e Zezé disputam um jogo sobre uma mesa redonda, jogando alternadamente.



Para jogar, elas possuem um monte de moedas de dez centavo. Uma jogada consiste em colocar uma moeda sobre a mesa. Zizi começa o jogo. Quem não puder encontrar um lugar para uma moeda perde. Como Zizi pode jogar para ganhar?

Solução

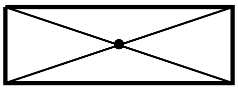
Na sua primeira jogada, Zizi coloca uma moeda no centro da mesa. Depois que Zezé colocar a segunda moeda sobre a mesa, Zizi coloca a terceira moeda exatamente no lugar oposto em relação ao centro da mesa, veja figura a seguir.



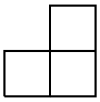
Se o Zezé pode encontrar um lugar para sua moeda, Zizi sempre pode encontrar um lugar simétrico para a sua, o que implica que, com essa estratégia, Zezé vai ganhar.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Quase todos concordam que o ponto de interseção das duas diagonais de um retângulo merece ser chamado de "**centro**" do retângulo. Afinal de contas, seria o **ponto de equilíbrio**, no sentido de que, se cortarmos um retângulo de papel, conseguiremos equilibrá-lo na ponta de um lápis, colocando a ponta do lápis no centro do retângulo.



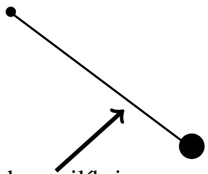
A figura a seguir, em forma de L, é composta por três quadrados congruentes.



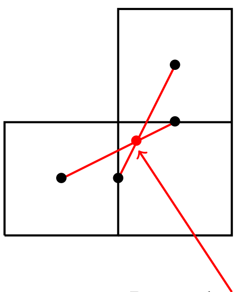
(i) Encontre o ponto de equilíbrio da figura.
(ii) Desenhe uma peça em forma de L, cujo ponto de equilíbrio encontra-se fora da figura.

Solução

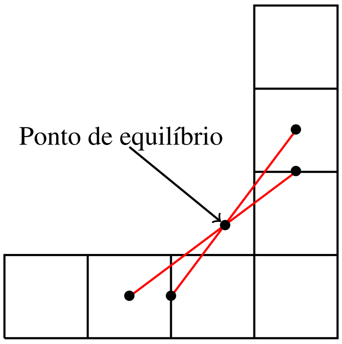
(i) Inicialmente, observe que, se duas massas são ligadas por uma haste reta de peso insignificante, então o ponto de equilíbrio do sistema está em algum lugar sobre a reta que une os dois. Se eles são de igual peso, então o ponto de equilíbrio está localizado no ponto médio da haste. Se não, então o ponto de equilíbrio fica mais perto da massa mais pesada, mas ainda está sobre a reta que as une.



Isto é tudo que precisamos para determinar a localização dos pontos de equilíbrio de figuras geométricas. Por exemplo, um retângulo de massa M (de papel uniformemente denso) é equivalente, em termos da noção física, ao ponto de massa M situada em seu centro (no ponto onde se cruzam as diagonais). Assim, o ponto de equilíbrio de um sistema de dois retângulos é um ponto em algum lugar na reta que une os seus centros.
Para responder a questão porposta, basta pensar a peça em forma de L como sendo a união de dois retângulos em duas maneiras distintas. Em cada uma, o ponto de equilíbrio da figura encontra-se ao longo do segmento que liga os centros do retângulo. Como existem dois desses segmentos, o ponto de equilíbrio deve estar no seu ponto de interseção! Veja figura a seguir.



(ii) Basta pensar numa figura em forma de L que tenha as ”pernas” longas:



PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Quantos números naturais com 5 dígitos são múltiplos de 3 e terminam com o dígito 6?

Solução

Um número natural com 5 dígitos é da forma **abcde**, com **a, b, c, d,e** $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$, mas $\mathbf{a} \neq 0$, para garantir que de fato o número possui 5 dígitos. Com isso, existem 10 possibilidades para a escolha do dígito que ocupará cada uma das posições **b,c,d,e** e 9 possibilidades para a escolha do dígito que vai ocupar a posição **a**.
Assim, como a escolha de cada dígito é independente da escolha de cada um dos outros, segue que a quantidade de números naturais com 5 dígitos é igula a

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90.000$$

Agora, observe que, a cada três consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Logo, existem $\frac{90.000}{3} = 30.000$ números naturais com 5 dígitos que são múltiplos de 3.
Por outro lado, os números naturais que são múltiplos de 3 terminam periodicamente em

$$3,6,9,2,5,8,1,4,7,0$$

Logo, somente $\frac{1}{10}$ dos números de cinco dígitos divisíveis por 3 terminam em 6. Portanto a resposta é $\frac{30.000}{10} = 3.000$.

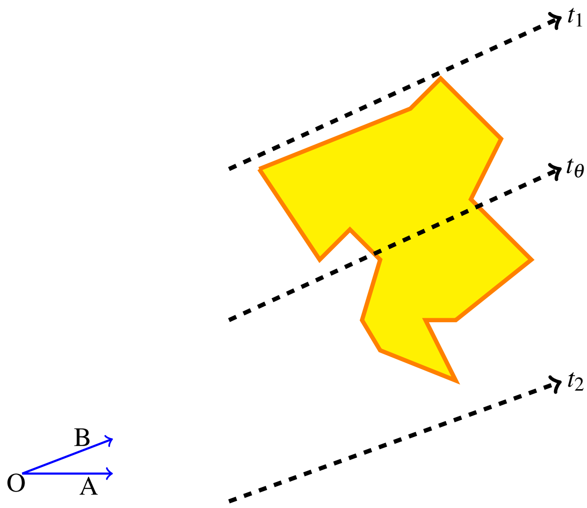
PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Quatro amigos querem compartilhar uma pizza. No entanto, enquanto comiam a pizza, ela ficou deformada, assumindo a forma de um polígono arbitrário, veja figura a seguir.

Prove que ainda é possível cortar a pizza em quatro partes de áreas iguais, fazendo exatamente dois cortes retos e perpendiculares.
Nota: Os dois cortes dividem o plano em quatro regiões, e as quatro partes são definidas como sendo as partes da pizza contidas nestas regiões. Uma parte pode consistir em várias pedaços desconectados.
(Os cortes podem sair da pizza. A pizza é colocada em uma placa para o corte, e um cortador de pizza é então rolado, em linha reta, duas vezes, de maneira tal que, as duas retas pelas quais a pizza é cortada sejam perpendiculares. A pizza não pode ser movida antes de se fazer o segundo corte).

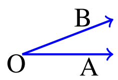
Solução

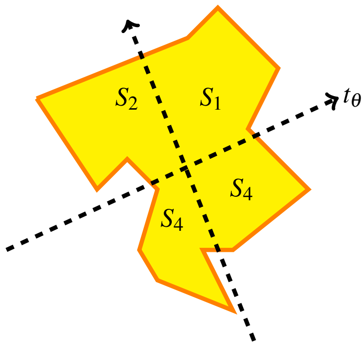
Por continuidade, para qualquer ângulo θ, medido a partir de uma direção fixa OA, existe uma única reta que fatia a pizza em duas partes de áreas iguais. Isto é explicado usando o Teorema do Valor Intermediário.
De fato, fixamos um segmento OA no plano XY, a partir do qual mediremos ângulos. Tomamos então um raio qualquer OB que faz um ângulo θ com OA. Seja t_θ a reta na direção OB, veja figura a seguir.



Seja t_1 a reta na direção de OB que está inteiramente de um lado da região determinada pelo polígino (i. e., a reta não intersepta a área limitada pelo polígono).
Agora, movemos esta reta t_1 paralelamente a ela própria, passando através da área limitada pelo polígono, até que ela esteja na posição t_2, fora da região limitada pelo polígono.
Definimos a função $f = f(\theta)$, através da reta t_θ, como sendo a diferença entre a parte da área limitada pelo polígono que esteja à esquerda da reta menos a parte da área limitada pelo polígono que esteja à direita da reta. Agora, observe que esta função é positiva para a função na posição da reta t_1 e é negativa

na posição da reta t_2.
Intuitivamente, a função $f = f(\theta)$, é contínua com relação ao ângulo, pois, para ângulos muito próximos, as retas traçadas são quase paralelas. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, ela possui um zero em alguma posição θ. Isto é, existe θ para o qual $f(\theta) = 0$, o que significa dizer que a reta t_θ divide a área ao meio.
Usando o caso acima, podemos encontrar a reta $t_{\theta+90^\circ}$, que é perpendicular à reta t_θ, e que divide a área limitada pelo polígono em duas partes iguias, veja figura a seguir.





Assim, temos que:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \qquad (*)$$
$$S_2 + S_3 = S_1 + S_4 \qquad (**)$$

Diminuindo $(*) - (**)$, temos:

$$S_1 - S_3 = S_3 - S_1 = -(S_1 - S_3)$$

Portanto, $S_1 - S_3 = 0$, o que implica $S_2 = S_4$. Para concluir, temos que encontrar checar que o ângulo para o qual $S_1 = S_2$ é igual a $\theta + 90^\circ$. Para isso, definimos a função

$$f \ : \ [0, 90^\circ] \longrightarrow R \, tal \; que \qquad f(\theta) = S_1(\theta) - S_2(\theta).$$

Como

$$f(0^\circ) = S_1(0^\circ) - S_2(0^\circ) \qquad e \qquad f(90^\circ) = S_2(90^\circ) - S_1(90^\circ) = S_2(0^\circ) - S_1(0^\circ),$$

segue que a função f possui sinais opostos em O° e 90°. Como f é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe θ para o qual $f(\theta) = 0$ Isto é, $S_1 = S_2$. Portanto, as retas t_θ e $t_{\theta+90^\circ}$ são as retas que satisfazem ao problema.