OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 01 - Data $01/02/2016$

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Cada um dos números $1,2,3,4,5,6,,7,8,9$ é pintado com uma das cores: vermelho, azul ou verde, de tal maneira que cada número pintado de vermelho é igual a soma de um número azul e um número verde.
Qual é a maior quantidade destes números que podem ser pintados de vermelho?

Solução

A resposta é 4.
Sejam v, a e g as quantidades de números pintados de vermelho, azul e verde, respectivamente.
Das hipóteses do problema, temos: $v+a+g=9 \qquad (*)$.
Suponha que seja possível pintar de vermelho $v \geq 5$ números. De $(*)$, temos que: $a+g \leq 4$. Como a números azuis e g números verdes formam ag somas, segue que a quantidade de número azuis é no máximo av. Assim, temos que:

$$a+g \leq 4 \Longrightarrow av \leq 4 \Longrightarrow v \leq 4,$$

que é uma contradição, pois supomos $v \geq 5$. Portanto, a quantidade máxima de números vermelhos é 4.
A seguir, um exemplo de que isto seja possível:

- Números pintados de azul: $1,2,3$.
- Números pintados de verde: $4,6$.
- Números pintados de vermelho: $5,7,8,9$.

O exemplo satisfaz ao problema, pois: $5=1+4$, $7=1+6$, $8=2+6$, e $9=3+6$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Um número inteiro positivo m é chamado de *violento* se existe um inteiro positivo K tal que a soma dos dígitos de K (na base 10) é igual a m, e, além disso, K é divisível por $m+2015$.
(a) Encontre um número violento maior do que 1000.
(b) Encontre um número violento menor do que 100.

Solução

(a) Se $m+2015=10000$, segue que $m=10000-2015=7985$. Agora considere o número inteiro

$$K=\underbrace{1111\cdots1}_{7985\ dígitos\ 1}0000,$$

que é múltiplo de 10000 e a soma de seus dígitos é igual a 7985. Portanto, $7985>1000$ é um número violento.

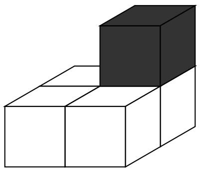
(b) Fazemos $m+2015=2048=2^{11}$. Com isso, temos $m=33$. Agora, observe que, para que um número inteiro seja múltiplo de 2^{11} basta que o número formado pelos seus últimos 11 dígitos seja múltiplo de 2^{11}. Logo, podemos tomar o número K como sendo

$$K = 9996\underbrace{0000\cdots 0}_{11\ dígitos\ 0},$$

que é múltiplo de $m+2015$, e, além disso, a soma de seus dígitos é igual a $m=33$. Portanto, 33 é um número violento.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Um *crymble* é um solido consistindo de quatro cubos unitários brancos e um cubo unitário preto, veja Figura a seguir.



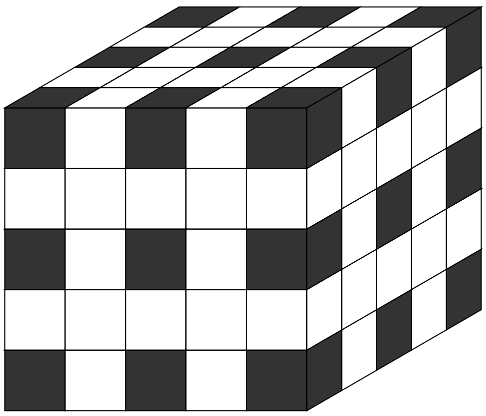
Ache o comprimento da aresta do menor cubo que pode ser formado completamente usando sólidos crymbles.

Solução

A resposta é 10.

Como um sólido crymble é formado por 5 cubos unitários, o volume do cubo que estamos procurando, e também o comprimento de sua aresta, tem que ser divisível por 5.

É fácil ver que um cubo com aresta medindo 5 não pode ser formado completamente por sólidos crymble. De fato, num cubo de aresta medindo 5, formado por cubo unitários, pinte 27 desse cubos unitários como na Figura a seguir.



Observe que um sólido crymble não pode formar completamente mais do que um cubo pintado, o que implica que necessitamos de no mínimo 27 sólidos crymbles. Mas o volume de todos eles é igual a $27\times 5=135$, que é maior do que o volume do cubo de aresta medindo 5.

Por outro lado, um cubo com aresta medindo 10 pode ser formado completamente com sólidos crymbles. Colocando juntos dois sólidos crymbles, é possível construir um paralelepípedo de dimensões $2\times 2\times 5$ e, fazendo isso, é possível obter um cubo de dimensões $10\times 10\times 10$, o que conclui a prova.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Prove que a série

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ \ln\ k)^{\ln\ k}}$$

é convergente.

Solução

Observe que, se $U = (\ln\ \ln k)^{\ln\ k}$, então

$$\ln\ U = \ln\left[(\ln\ \ln k)^{\ln\ k}\right] = (\ln\ k).[\ln\left[(\ln\ \ln k)\right] \Longrightarrow U = e^{(\ln\ k).[\ln\ [(\ln\ \ln k)]]} = k^{\ln\ \ln\ \ln k}.$$

Portanto, temos

$$(\ln\ \ln k)^{\ln\ k} = k^{\ln\ \ln\ \ln k}.$$

Por outro lado, temos

$$\ln\ \ln\ \ln\ e^{e^{e^2}} = \ln\ e^2 = 2.$$

Logo, para qualquer $k > e^{e^{e^2}}$, temos $k^{\ln\ \ln\ \ln\ k} > k^2$.
Portanto,

$$\frac{1}{(\ln\ \ln\ k)^{\ln\ k}} = \frac{1}{k^{\ln\ \ln\ \ln\ k}} < \frac{1}{k^2}.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, segue que a série dada converge.