OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 03 - Data 15/02/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Num planeta muito distante, o ano tem 2016 dias. Em cada dia do ano, cada habitante do planeta mente ou diz a verdade durante todo o dia. Para um habitante do planeta foi feita a seguinte pergunta:
Quantos dias você mente no ano?
O habitante respondeu:
No primeiro dia: "Eu minto pelo menos um dia no ano".
No segundo dia: "Eu minto pelo menos dois dia no ano".
No terceiro dia: "Eu minto pelo menos três dia no ano".
E assim, sucessivamente, todos os dias do ano.
Quantos dias do ano mente o referido habitante do planeta?

Solução

Inicialmente, observe que o habitante não pode mentir todos os dias do ano, pois, se isto acontecesse, todas suas respostas seriam verdadeiras, que é uma contradição com o fato de que todos os dia mente.
De forma análoga, podemos concluir que o habitante não pode falar a verdade todos os dias do ano.
Isto significa dizer que o habitante mente pelo menos um dia no ano.
Seja n o último dia do ano em que o habitante diz a verdade. Isto significa dizer que em todos os outros dias (se existem) ele mente. Como no dia n diz a verdade quando diz a frase "Eu minto n dias no ano"', então as respostas que deu nos dias anteriores também são verdadeiras. Resumindo, o habitante diz a verdae nos dias $1, 2, 3, \cdots, n,$ e nos outros dias mente. Como não diz a verdae todos os dias, temos que $n < 2004,$ com isto podemos garantir que o habitante mente no dia $n+1.$
Como a frase "Eu minto pelo menos $n+1$ dias no ano" é falsa, deve acontecer que a quantidade de dias que o habitante mente é menor do que $n+1,$ e como a frase "Eu minto pelo menos n dias no ano" é verdadeira, isto obriga que a quantidade de dias em que o habitante mente seja exatamente $n.$
Como consequencia, o habitante diz a verdade n dias e mente n dias. Como o total de dias é 2016, segue, portanto, que o habitante mente 1008 dias no ano.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Uma peça L é formada a partir de quadrados 2×2, dos quais retiramos um dos quatro cantos, veja Figura A a seguir. Diga, justificando, se é possível cobrir um tabuleiro 5×7, Figura B a seguir, usando peças $L's$, de modo que a cobertura, em várias camadas, não cruze as fronteiras do tabuleiro e de maneira tal que cada casa seja coberta pelo mesmo número de peças L.

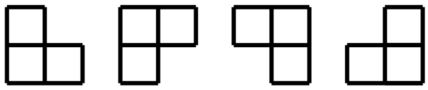

Figura A- Peça L

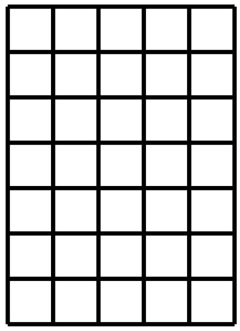

Figura B - Tabuleiro 5×7

Solução

(Rússia - 1996). A resposta é não.
Pintamos as casas do tabuleiro dado 5×7 alternadamente de preto e branco, de modo que as casas nos quatro cantos sejam pretas. Em cada casa preta preta escrevemos o número -2, e em cada casa branca escrevemos o número 1. Observe que a **soma** dos números em todas as casas cobertas por cada peça L é não negativa, e consequentemente se cobrimos o tabuleiro em k níveis, a soma dos números das casas cobertas por aquelas peças L é não negativa. Mas, se o número é S e s é a soma dos números sobre o tabuleiro, temos que

$$S = ks = k(-2\times 12 + 23\times 1) = -k < 0,$$

que é uma contradição.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Seja $n \geq 2$ um número inteiro positivo. Temos $2n$ bolas, e cada uma delas é identificada por um número inteiro. Sabemos que, sempre que formamos n pares de bolas, duas delas possuem a mesma soma.
(1) Demonstre que existem quatro bolas identificadas com o mesmo número.
(2) Demonstre que a quantidade total de números inteiros distintos empregados para identificar as bolas é no máximo $n-1$.

Solução

(Espanha 2015)
(1) Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n}$ os números inteiros escritos nas bolas. Formemos todos os pares de números empregados para identificar as bolas b_{2k-1} *e* b_{2k}, com $k = 1, 2, \cdots, n$. A soma destes números são:

$$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq s_3 = a_5 + a_6 \geq \cdots \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}$$

Como as somas estão em ordem não crescente, se existem dois pares de bolas identificadas de tal maneira que a soma de seus números são iguais, temos que existe k tal que $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, com $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+2}$, o que implica que $a_{2k-1} = a_{2k} = a_{2k+1} = a_{2k+2}$.
(2) Suponha o contrário. Isto é, a quantidade total de números empregados para identificar as bolas seja

n. Vamos mostra que esta hipótese nos leva a uma contradição.
Sejam $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n$ esses números. Ordenamos os números empregados para identificar as bolas restantes por $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_n$. Agora, formemmos os pares (b_i, c_i) para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Como os pares (b_i, c_i) e (b_{i+1}, c_{i+1}) são tais que $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, segue que não pode haver dois pares com os mesmos números, que é uma contradição com a hipótese (1).
Portanto, a quantidade total de números inteiros distintos empregados para identificar as bolas é no máximo $n-1$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Um jogador de xadrez disputa no mínimo um jogo todo dia e no máximo 12 jogos toda semana. Prove que existe uma sequência de dias consecutivos nos quais ele disputa exatamente 20 jogos.

Solução

Seja a_n o número de jogos disputados nos primeiros n dias.
Por hipótese, temos $21 \leq a_{21} \leq 36$. Logo, dentre os números $a_1, a_2, \cdots, a_{21}$, existe dois números a_i e a_j com $1 \leq i \leq j \leq 21$ tendo o mesmo resto na divisão por 20. Portanto, $1 \leq a_i - a_j \leq 35$ e 20 divide $a_j - a_i$. Segue que $a_j - a_i = 20$. Consequentemente, nos dias i, $i+1$, $i+2, \cdots$, $j-1$, j o jogador disputou exatamente 20 partidas.