OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 04 - Data 23/02/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Um grupo de pais de família entrou num edifício, que possui uma escada com 198 degraus igualmente distribuídos entre seus 12 andares. O grupo subiu pelos degraus e, quando estava no degrau de número 162, encontrou com a pessoa a qual procurava, que vinha descendo.
Em que andar houve o encontro?

Solução

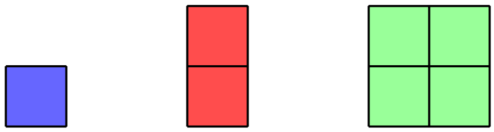
(Olimpíada Peruana de Matemática - 2005)
De baixo para cima, vamos nomear os degraus por: $1, 2, 3, \cdots, 198$. Agora, observe que os 198 degraus se distribuem da seguinte forma:

- Degraus do andar 1 ao andar 2;
- Degraus do andar 2 ao andar 3;
- ....
- Degraus do andar 11 ao andar 12.

Isto significa que os 198 degraus da escada se dividem em 11 partes. Como, por hipótese, estão igualmente distribuídos, em cada parte existem $\frac{198}{11} = 18$ degraus.
Por outro lado, o degrau de número 18 está no segundo andar, o degraus de número 36 está no terceiro andar etc. Assim, o degrau de número $18k$, com $k = 1, 2, 3, \cdots, 10$, está no andar de número $k+1$.
Como $162 = 18 \times 9$, o degrau de número 162 está no andar de número $1+9 = 10$.
Portanto, o encontro se dá no décimo andar.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Um tabuleiro 5×2, como o da Figura a seguir, deve ser coberto completamente (sem superposição) com fichas coloridas do tipo A, B *e* C, de cores azul, vermelha e verde, respectivamente, mostradas abaixo.



Tipo A **Tipo B** **Tipo C**

Encontrar a quantidade de maneiras distintas de cobrir o tabuleiro.
(Observe que a ficha do tipo B pode ser usada na forma vertical ou horizontal e que não é obrigatório utilizar os três tipos de fichas todas vez que for cobrir o tabuleiro)

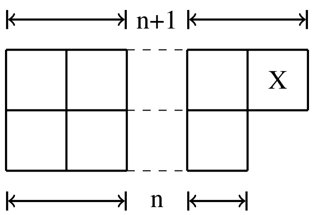
Solução

(Olimpiada de Matemática do Perú - 2005 - Nível II)
Inicialmente, vamos fazer algumas considerações num tabuleiro mais geral, de dimensões $n \times 2$.
Assim, seja S_n a quantidade de maneiras distintas de se cobrir um tabuleiro $n \times 2$ usando somente fichas do tipo A ou B.
É fácil ver que $S_1 = 2$ e $S_2 = 7$.
Seja T_n o número de maneiras distintas de se cobrir um tabuleiro $n \times 2$ no qual se tenha suprimido uma casa de um canto, usando somente fichas do tipo A ou B. Veja, na Figura a seguir, o caso $n = 5$, onde T_5 denota o número de maneiras distintas em que se pode cobrir o tabuleiro da Figura usando somente as fichas do tipo A ou B.

É fácil ver que $T_1 = 1$ e $T_2 = 3$.
Precisamos encontrar uma relação que associe T_n e S_n. Vamos mostrar que, para todo inteiro positivo n, temos:

$$T_{n+1} = S_n + T_n.$$

Considere um tabuleiro $(n+1) \times 2$ no qual eliminamos a casa do canto inferior direito, veja Figura a seguir.



Seja X a casa do tabuleiro que está mais a direita.
O total de maneiras distintas de cobrir o tabuleiro com fichas do tipo A ou B é igual a T_{n+1}.
Se a casa X é coberta por uma ficha do tipo A, o resto do tabuleiro pode ser coberto de S_n maneiras

distintas.
Se a casa X é coberta por uma ficha do tipo B, o que resta do tabuleiro pode ser coberto de T_n maneiras distintas.
Como T_{n+1} é o número total de maneiras de cobrir o tabuleiro com fichas do tipo A ou B, segue que

$$T_{n+1} = S_n + T_n. \qquad (*)$$

De maneira análoga, é possível concluir que:

$$S_{n+1} = T_{n+1} + T_n + S_{n-1} + S_n. \qquad (**)$$

Portanto, usando $(*)$ e $(**)$, obtemos a tabela a seguir:

n	1	2	3	4	5
S_n	2	7	22	71	228
T_n	1	3	10	32	103

Inicialmente, nos preocupamos em cobrir o tabuleiro somente com fichas do tipo A ou B. Agora, para um tabuleiro 2×5, vamos dividir nosso estudo em três casos:

- Usamos para cobrir o tabuleiro somente fichas do tipo A ou B, nenhuma do tipo C.
  Neste caso, como obtivemos acima, a quantidade total de maneiras distintas de cobrir o tabuleiro é igual a $S_5 = 228$.

- Usamos para cobrir o tabuleiro uma única ficha do tipo C e as restantes do tipo A ou B.
  Se a ficha C ocupa as colunas 1 e 2, o restante do tabuleiro pode ser coberto de $S_3 = 22$ maneiras distintas.
  Se a ficha C ocupa as colunas 2 e 3, o restante do tabuleiro pode ser coberto de $S_1 \times S_2 = 2 \times 7 = 14$ maneiras distintas.
  Se a ficha C ocupa as colunas 3 e 4, o restante do tabuleiro pode ser coberto de 14 maneiras distintas.
  Se a ficha C ocupa as colunas 4 e 5, o restante do tabuleiro pode ser coberto de 22 maneiras distintas.

- Usamos exatamente duas fichas do tipo C.
  Neste caso, existem precisamente três maneiras de se colocar as fichas C no tabuleiro 5×2. Em cada uma delas, o que resta do tabuleiro pode ser coberto de $S_1 = 2$ maneiras distintas. Portanto, no total existem $2 + 2 + 2 = 6$ maneiras distintas de cobrir o tabuleiro.

Portanto, o número total de maneiras de cobrir o tabuleiro 5×2 usando fichas dos tipos A, B ou C é igual a $228 + 72 + 6 = 306$.

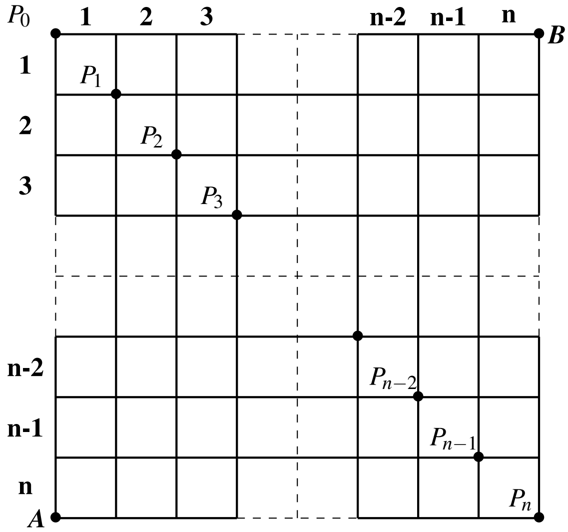
PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Seja n um número inteiro positivo. Prove que:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Solução

Existem muitas soluções para o problema. A seguir, vamos apresentar uma solução envolvendo um tabuleiro $n \times n$.
Assim, considere um tabuleiro $n \times n$, veja Figura a seguir.



Observe que, a quantidade total de maneiras de se ir do vértice inferior esquerdo, A, ao vértice superior direito B, caminhando sempre à direita e/ou para acima, é igual a

$$\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n} \qquad (*)$$

Por outro lado, podemos contar o total de maneiras de se ir do ponto A ao ponto B passando por exatamente um dos pontos $P_0, P_1, P_2 \cdots, P_n$.
Passando exatamente pelo ponto P_k, o número de maneiras seria igual ao produto da quantidade de maneiras de se ir de A até o ponto P_k vezes a quantidade de maneiras de se ir de P_k até o ponto B, que é igual a

$$\binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2.$$

Fazendo isto para $k = 0, 1, 2, 3, \cdots n$ e igualando ao número total acima obtido em $(*)$, temos:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Existe um polinômio cuja quantidade de raízes seja maior do que o grau do próprio polinômio? Se sim, dê um exemplo. Se não, explique porque.

Solução

A resposta é sim.
Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_{12}, +_{(12)}, \cdot_{(12)})$ e $P(X) = X^2 - 4 \in A[X]$.
É fácil ver que $X = 2 \; e \; X = -2 = 10$ são raízes do polinômio, pois :

$$P(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad e \qquad P(10) = 10^2 - 4 = 100 - 4 = 96 = 8 \times 12 = 0.$$

Além disso, $X = 8$ também é raiz de $P(X)$, pois:

$$P(8) = 8^2 - 4 = 64 - 4 = 60 = 5 \times 12 = 0.$$

Portanto, o polinômio $P(X) = X^2 - 4 \in \mathbb{Z}_{12}$ é do grau 2 e possui 3 raízes.