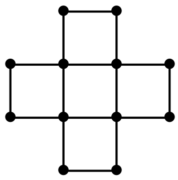
## OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

## LISTA SEMANAL Nº 05 - Data 02/03/2016

### PROBLEMA PARA O NÍVEL I

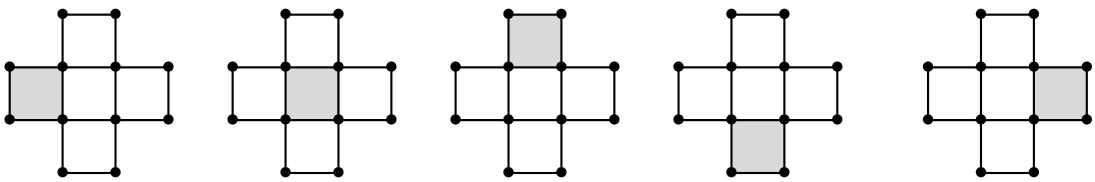
Na Figura a seguir, temos cinco quadrados, os quais possuem seus vértices pintados de preto, alguns deles pertencendo a mais de um quadrado.



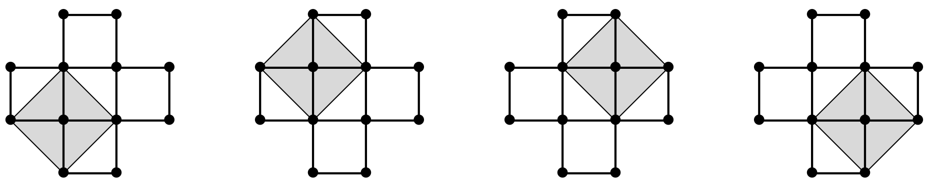
Na figura dada, existem quantos quadrados cujos vértices são os vértices pintados de preto ?

**Solução**

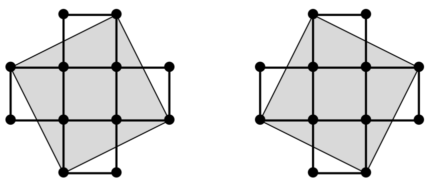
A resposta é $11$.
Inicialmente contamos os cinco quadradinhos iniciais:



Existem mais quatro quadrados, de mesmas dimensões, com vértices no pontos pretos dados, que estão mostrados na Figura abaixo:



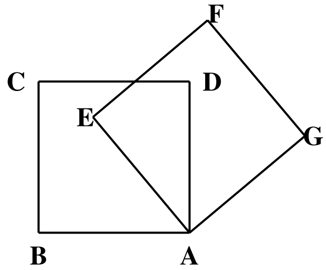
Finalmente, existem $2$ quadrados maiores, mostrados na Figura a seguir:



Portanto, existem $4+5+2=11$ quadrados que possuem seus vértices pintados de preto na Figura dada.

## PROBLEMA PARA O NÍVEL II

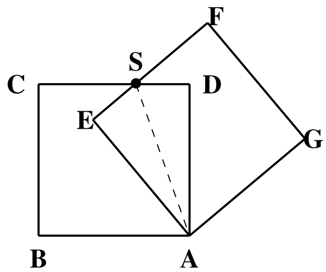
Na Figura a seguir mostramos os quadrados $ABCD$ e $AEFG$ tais que os comprimentos $\overline{AB} = \overline{AG}$.




Se a medida do ângulo $m(E\hat{A}B) = 50°$, calcule, em graus, a soma das medidas dos ângulos $m(F\hat{C}D) + m(D\hat{G}A)$.

**Solução**

Seja $S$ o ponto de interseção dos segmentos $CD$ e $EF$.




Como $\overline{AB} = \overline{AG}$, então $\overline{AE} = \overline{AD}$ e como $m(A\hat{E}C) = m(A\hat{D}S) = 90°$, temos que os triângulos $AES$ e $ADS$ são congruentes, o que implica que $\overline{ES} = \overline{SD}$ e $\overline{CS} = \overline{SF}$.
Como $m(C\hat{S}E) = m(D\hat{A}E) = 90° - m(E\hat{A}B)$, segue

$$m(F\hat{C}D) = m(c\hat{F}E) = \frac{m(C\hat{S}E)}{2} = 20°.$$

Por outro lado, temos que $m(D\hat{G}A) = 90° - m(D\hat{A}E) = 50°$ e como $\overline{AD} = \overline{AG}$, então temos:

$$m(D\hat{G}A) = m(G\hat{D}A) = \frac{180° - m(D\hat{D}G)}{2} = \frac{180^o - 50°}{2} = 65°.$$

Portanto, $m(F\hat{C}D) + m(D\hat{G}A) = 20° + 65° = 85°$

## PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Calcule a soma de todos os divisores do número $K = 19^{88} - 1$ que sejam da forma $2^x \times 3^y$, com $x, y$ inteiros positivos.

**Solução**

A idéia é encontrar as mais altas potência de $2$ e de $3$ que dividem $K$. Para isso, vamos usar o Teorema do Binômio de dois modos distintos:

- Inicialmente, observamos que

$$19^{88} = (20-1)^{88} = 880 - 88120 + 88220^2 - 88320^3 + \cdots + 888820^{88} =$$

$$= \ 1 - 88 \times 20 + (\textit{termos divisveis por } 2^6). \qquad (*)$$

  Para concluir $(*)$ usamos o fato de que $882 = \frac{1}{2} \times 88 \times 87 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 29$.

- Depois, usamos o fato de que

$$19^{88} = (18+1)^{88} = 880 - 88118 + 88218^2 - 88318^3 + \cdots + 888818^{88} =$$

$$= \ 1 - 88 \times 18 + (\textit{termos divisveis por } 3^4).$$

Como $88 \times 20 = 2^5 \times 5 \times 11$ e $88 \times 8 = 3^2 \times 2^4 \times 11$, segue que $K = 19^{88} - 1$ é divisível por $2^5$, mas não por $2^6$, e que é divisível por $3^2$ e não por $3^3$.
Assim, a soma que queremos é

$$S = \sum_{1(x,y);\ x>0,\ y>0\ 2^y.3^y\ \textit{dividindo } K} 2^x \times 3^y = \sum_{1x\in\{1,2,3,4,5\}y\in\{1,2\}} 2^x \times 3^y =$$

$$S = \sum_{x=1}^{5} 2^x \times \sum_{y=1}^{2} 3^y = (2+4+8+16+32) \times (3+9) = 62 \times 12 = 744.$$

## PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Existe um polinômio não nulo, do grau 2, possuindo infinitas raízes? Se sim, dê um exemplo. Se não, explique porque.

### Solução

A resposta é sim.
Para construir um exemplo, seja **E** um conjunto infinito e considere o conjunto $B$ das partes de **E**. Isto é,

$$\mathbf{B} = \mathscr{P}(\mathbf{E}) = \{Y \mid Y \subset E\}.$$

Definimos as duas seguintes operações em **B**:

- A primeira operação é a **diferença simétrica**, denotada por $\Delta$.
  Recordando, se $M, N$ são elementos de **B**, tem-se: $M \,\Delta\, N = (M-N) \cup (N-M)$

- A segunda operação é a **interseção**, denotada por $\cap$.

É fácil ver que $(\mathbf{B},\ \Delta,\ \cap)$ é um anel comutativo, onde o conjunto vazio $\emptyset$ é o elemnto unidade para a operação $\Delta$ e **E** é o elemento unidade para a operação $\cap$.
Agora, considere o polinômio:

$$Q(X) = (X \cap X) \,\Delta\, X = X^2 + X,$$

onde $+ = \Delta$ e $\cap = \times$.
Observe que, para cada $T \in B = \mathscr{P}(E)$, temos $T \cap T = T$ e $T \,\Delta\, T = \emptyset$.
Portanto, todos os elementos do conjunto $B$, que são infinitos, são raízes de $Q(X)$ e, além disso, $Q(X)$ não é o polinômio nulo, o que conclui a prova de que o nosso polinômio de grau 2 possui infinitas raízes.