OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 06 - Data 07/03/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 até 999 (cada número aparece em um e somente um cartão). Sem olhar, Maria retira alguns cartões e calcula a soma dos dígitos em cada um deles. Quantos cartões no mínimo Maria deve retirar para ter certeza que possui três cartões com a mesma soma dos dígitos?

Solução

A resposta correta é 53.
Observe que existem 27 somas possíveis: que vão de $1+0+0=1$ até $9+9+9=27$. Acontece que as somas 1 e 27 só ocorrem uma vez, nos cartões numerados com 100 e 999, respectivamente. As demais somas ocorrem pelo menos duas vezes. Assim, quando Maria retirar os primeiros 27 cartões, pode ocorrer que todas as somas sejam distintas. Numa nova retirada de 25 cartões (agora não pode mais ocorrer a retirada de um cartão cuja soma seja 1 ou 27), todas as somas podem ser distintas, ficando, se todas as somas ainda forem distintas, com dois cartões com a mesma soma. O próximo cartão retirado vai garantir que Maria tenha três cartões com a mesma soma dos dígitos. Portanto, o número mínimo de cartões que Maria deve retirar para ter certeza que possui três cartões com a mesma soma dos dígitos é $27+25+1=53$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo em que jogam alternadamente. De um baralho de cartas extrai-se nove cartas numeradas de 2 *a* 10 e as coloca com a face para cima sobre a mesa. Uma jogada consiste em retirar uma das cartas. O jogador A começa. Vence quem primeiro consegue três cartas cuja soma seja exatamente 18. Quem possui uma estratégia para não perder: A ou B?

Solução

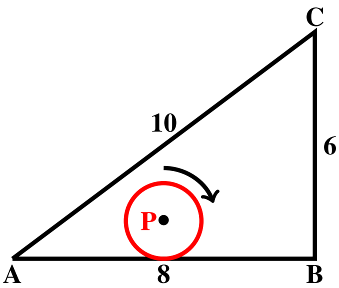
O jogador A possui uma estratégia para não perder o jogo. Sua estratégia consiste em escrever os nove números como segue, formando um quadrado mágico, onde a soma dos números em qualquer linha, qualquer coluna e qualquer diagonal seja igual a 18

3	10	5
8	6	4
7	2	9

Com esta estratégia, o jogador A joga como se estivesse disputando uma partida do jogo da velha. Se na sua primeira jogada ele escolhe a carta de número 6, a carta que está no centro do tabuleiro, ele não perde o jogo, basta seguir atentamente a estratégia do jogo da velha.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

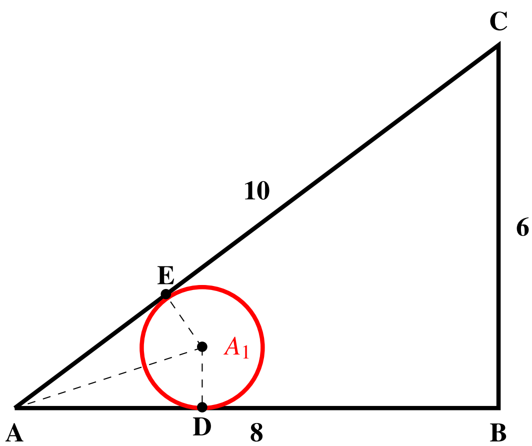
Os lados do ΔABC têm comprimentos de $6, 8$ e $10.$ Um círculo com centro no ponto P e raio 1 rola, sem deslizar, dentro do $\Delta ABC,$ passando por todos os três lados do triângulo e, durante seu trajeto, permanecendo sempre tangente a pelo menos um dos lados, veja figura a seguir.



Quando P retorna pela primeira vez à sua posição original, qual a distância que o ponto P percorreu?

Solução

(44-AHSME-1993) Quando o círculo se aproxima ao máximo de um dos vértices do triângulo, por exemplo, se ele fica bem próximo do vértice $A,$ o centro do círculo está no ponto, digamos A_1 e tangencia os lados AB e AC nos pontos D e $E,$ respectivamente, veja figura a seguir.



Quando círculo rola e o ponto P se aproxima ao máximo do vértice A, o caminho que o ponto P percorre é paralelo ao lado AB do triângulo e tem comprimento igual a

$$\overline{AB} - \overline{AD}$$

Agora, observe que:

$$\overline{AD} = \cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

Raciocinando de módulo análogo para quando o ponto P se aproxima ao máximo dos outros dois vértices, B e C, podemos concluir que o comprimento, L, do caminho todo percorrido pelo ponto P é igual a:

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} - \cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - \cot\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) - \cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

Por outro lado, temos que

$$\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}\right] \cdot \left[\frac{2\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}\right] = \frac{2\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{sen\ A} = \frac{1+\cos\ A}{sen\ A} = \frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}} = 3.$$

De maneira análoga, podemos obter

$$\cot\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1+\cos\ C}{sen\ C} = \frac{1+\left(\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}} = 2.$$

Por outro lado, temos $\cot\left(\frac{B}{2}\right) = \cot\ 45° = 1$.
Portanto, o comprimento do caminho percorrido pelo ponto P é igual a

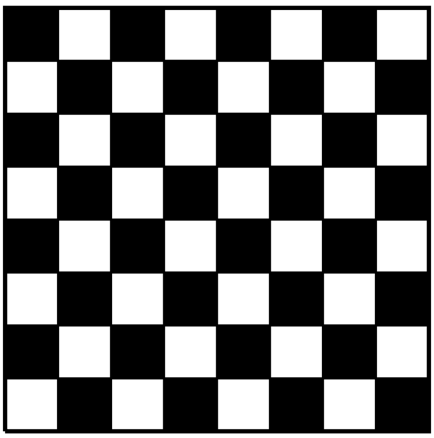
$$L = 8+6+10-2(3)-2(1)-2(2) = 12.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

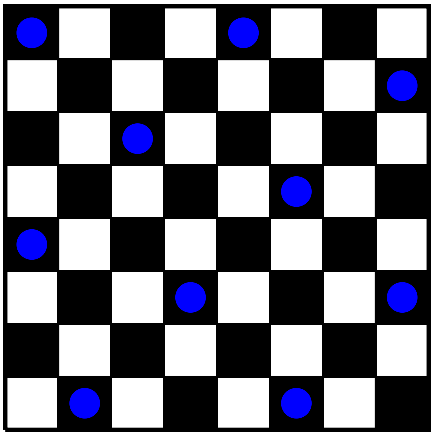
Considere um tabuleiro quadrado $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par. O tabuleiro divide-se um n^2 quadrados unitários. Dizemos que dois quadrados distintos do tabuleiro são adjacentes se possuem um lado em comum. Marcam-se K quadrados unitários do tabuleiro de tal maneira que cada quadrado (marcado ou não) é adjacente a pelo menos um quadrado marcado.
Determinar o menor valor possivel de K.

Solução

(IMO, Bucarest, Romênia - 1999) Se pintamos as casa do tabuleiro $n \times n$ alternadamente branca e preta, veja a figura a seguir para o caso em que $n = 8$, teremos que as casas adjacentes as brancas são as pretas, e vice-versa.



Assim, para que todas as casas brancas tenham alguma casa adjacente marcada, devemos buscar somente as casas marcadas pretas e vice-versa. Logo, o número mínimo de casas brancas marcadas é igual ao número mínimo de casas pretas marcadas, pois n é par e existe uma simetria no tabuleiro pintado. Até aqui temos um por cento do problema resolvido mas, não sabemos qual é a quantidade mínima de casas marcadas, somente conhecemos que este número é par.
Se fizermos uma pintura nas casas pretas como mostra na figura a seguir para o caso em que $n = 8$ (marcando nas diagonais pretas ímpares as posições ímpares),



teremos então k casas pretas marcadas, as quais satisfazem que todas as casas brancas são adjacentes a alguma delas, o que implica que o valor mínimo de casas pretas marcadas é menor ou igual a k.
Mas, por outro lado, observemos que estas k casas pretas marcadas estão distribuídas de forma tal que as casas brancas a marcar que sejam adjacentes a elas são diferentes, o que nos permite concluir que o valor mínimo da quantidade de casa brancas marcadas é maior ou igual a k. Assim, como temos que o número mínimo de casas brancas marcadas é igual ao número mínimo de casas pretas marcadas, segue que o menor valor possível de K é $2k$, mas k coincide com a soma $1+2+3++n/2$. Portanto, o menor valor possível é $K = r(r+1)$, onde $r = n/2$.