# OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

## LISTA SEMANAL Nº 07 - Data 14/03/2016

### PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Dois jogadores, $A$ e $B$, disputam um jogo usando um polígono regular de 50 lados. Eles fazem seus movimentos alternadamente e o jogador $A$ começa. Um movimento consiste em desenhar uma diagonal do polígono que não cruze outra diagonal já traçada. O primeiro jogador que não puder fazer seu movimento perde o jogo. Supondo que ambos os jogadores fazem suas melhores jogadas, quem vence: $A$ ou $B$? Qual a estratégia para ganhar?

**Solução**

O jogador $A$ vence.
Um polígono regular com $50$ lados, possui um número par de vértices, o que significa dizer que existe uma diagonal que divide os restantes vértices em dois subconjuntos com mesmo número de elementos (divide o polígono ao meio). Assim, em seu primeiro movimento, o jogador $A$ traça uma diagonal $DD'$ que divide o polígono ao meio. A partir daí, para toda diagonal traçada pelo jogador $B$, o jogador $A$ traça a diagonal simétrica em relação à diagonal $DD'$, vencendo o jogo.

### PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Dois jogadores, $A$ e $B$, disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente, usando um maço de $2002$ cartões. Cada cartão tem nele escrito um números inteiro de $1$ a $2002$ (um só número em cada cartão). Colocam-se os cartões sobre uma mesa, com a face virada para cima. O jogador $A$ começa. Uma jogada consiste em pegar um cartão da mesa, até que todos os cartões sejam retirados. Depois de retirados todos os cartões, cada jogador soma os números de seus cartões. Vence o jogo aquele jogador para o qual o último dígito da soma de todos os números de seus cartões é maior que o último dígito da soma de todos os números dos cartões do seu adversário. Quem tem uma estratégia vencedora: $A$ ou $B$?

**Solução**

(Tournament of the Towns, Junior O level, fall 2002) O primeiro jogador, $A$ vence.
Para isso, ele forma todos os pares de cartões numerados com $(k, 1000+k)$, com $k = 1, 2, 3, \ldots, 1000$, mais o par $(2001, 2002)$.
Agora, observe que todos os $1000$ pares são formados com números que possuem o mesmo último dígito (o mesmo dígito das unidades). Na sua primeira jogada, o jogador $A$ começa escolhendo para pegar o cartão numerado com $2002$. A partir deste momento, sua estratégia é buscar o outro elemento do par escolhido a cada vez que o jogador $B$ fizer sua escolha. Então, eventualmente, o segundo jogador é forçado a pegar em algum momento o cartão numerador com 2001.
Em geral, se ainda tem carta não retiradas e todas as cartas escolhidas formam pares do tipo $(k, 1000+k)$, na sua próxima jogada o jogador $A$ retira qualquer carta numerada, digamos com $k'$. Em seguida, o segundo jogador terá que pegar, em algum momento, o cartão com o qual formará o par com o cartão numerado com $k'$. Isto decorre do fato de que, cada vez que o jogador $B$ seleciona algum cartão, o jogador $A$ escolhe o cartão que forma o par com aquele escolhido por $B$.
No final do jogo, a soma dos cartões escolhidos pelo jogador $A$ será igual a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 + 2002 = 502.502,$$

que tem com último dígito o $2$, enquanto a soma dos números dos cartões escolhido polo jogador $B$ termina em $1$, o que garante a vitória de $A$.

## PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Dois jogadores de xadrez disputam uma partida, cada um deles usando um relógio. Quando um jogador faz um movimento, ele desliga seu relógio e começa a marcar o relógio do seu oponente. Sabe-se que, quando ambos os jogadores completam seus quadragésimo movimento, os dois relógio registram ao mesmo tempo exatamente 2 h 30 min. Prove que existiu um momento no jogo em que o relógio de um jogador registrou 1 min 51 seg menos do que o relógio do outro. Podemos afirmar que existiu um momento no jogo em que o relógio de um jogador registrou 2 min menos do que o relógio do outro?

**Solução**

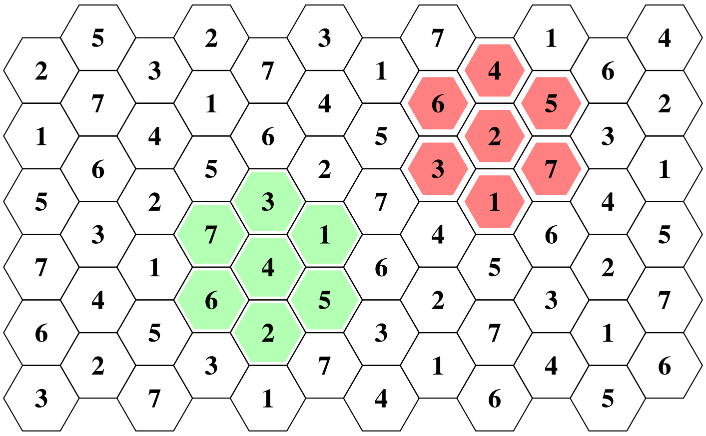
(Tournament of the Towns, senior questions, autum 1985) Lembrando: num jogo de xadrez o jogador que inicia o jogo movimenta as peças brancas, o outro movimenta com as peças pretas.
Suponha que os dois relógios nunca registrem uma diferença de tempo igual a 1 min e 51 seg (que é igual a 111 seg.)
Isto significa que, a primeira jogada do jogador que movimenta as peças brancas termina antes de seu relógio marcar 111 segundos. A primeira jogada do jogador que movimenta as peças pretas é concluída antes de serem decorridos 222 segundos no seu relógio. O jogador que movimenta as peças brancas conclui o terceiro movimento do jogo antes de completar 333 segundos no seu relógio, e assim por diante, e seu quadragésimo movimento tem de ser antes de seu relógio registrar $79 \times 111$ segundos do seu primeiro movimento. Mas, esse tempo é menor do que 2 h 30 min, que é uma contradição. Portanto, existe um momento no jogo em que o relógio de um jogador registrou 1 min 51 seg menos do que o relógio do outro.
Se o relógio do jogador que movimenta as peças brancas registra 115 segundos em seu primeiro movimento, 145 segundos em seu quadragésimo movimento e 230 segundos para cada um de seus movimentos intermediários, enquanto o jogador que movimenta as peças pretas registra 230 segundo para cada um dos seus primeiro 39 movimentos e 30 segundos para seu quadragésimo movimento, então ambos os jogadores usam 2h 30 min para o jogo completo e os dois relógios nunca registram uma diferença que exceda 1 min 55 seg. Portanto, não existe momento do jogo em que o relógio de um jogador registrou 2 min menos do que o relógio do outro.

## PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

É possível fazer uma partição do plano em sete subconjuntos, de maneira tal que todo par de pontos do plano, separados por 1 unidade, não esteja no mesmo subconjunto?

**Solução**

A resposta é sim.
Basta considerar a pavimentação do plano por hexágonos regulares congruentes, possuindo o comprimento da maior diagonal menor do que $1$, veja figura a seguir.


5 2 3 7 1 4
2 3 7 1 4 6
7 1 4 6 5 2
1 4 6 5 2 3
6 5 2 3 7 1
5 2 3 7 1 4
3 7 1 4 6 5
7 1 4 6 5 2
4 6 5 2 3 7
6 5 2 3 7 1
2 3 7 1 4 6
3 7 1 4 6 5