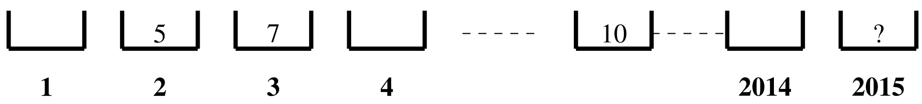
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 09 - Data 28/03/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Distribuem-se bolas em 2015 caixas arrumadas em linha reta, conforme a figura a seguir. O total de bolas em quaisquer quatro caixas consecutiva é 30.



Quantas bolas tem na caixa de número 2015?

Solução

(Olimpíada da África do Sul - 2015) A resposta é 7.
Vamos chamar de x_i a quantidade de bolas na caixa de número i, com $i = 1,\ 2,\ 3,\ldots,2014,\ 2015$.
Pela hipótese do problema, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Longrightarrow x_1 = x_5$$

Como esse mesmo raciocínio, teremos

$$x_2 + x_{23} + x_4 + x_5 = 30 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \Longrightarrow x_2 = x_6$$

Deste modo, é fácil ver que $x_n = x_{n+4}$.
Como $2015 = 4 \times 503 + 3$, conclui-se que $x_{2015} = x_3 = 7$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Suponha que os vértices de um polígono regular de 20 lados são coloridos com três cores: vermelho, azul e verde, de tal maneira que existem exatamente três vértices vermelhos. Provar que existem três vértices do polígono, A, B, C, tendo a mesma cor, de modo que o triângulo ABC é isósceles.

Solução

Como existem exatamente três vértices coloridos de vermelho, entre os 17 vértices restantes tem de ter nove da mesma cor, digamos que sejam coloridos de azul. É fácil ver que podemos dividir os vértices do regular de 20 lados em quatro conjuntos disjuntos, tal que cada conjunto consiste em vértices que formam um pentágono. Uma vez que existem nove vértices coloridos de azul, pelo menos um desses conjuntos terá três vértices coloridos de azul. Como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, segue o resultado.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Dois jogadores, A e B, disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. Escrevem-se no quadro-negro os 20 números naturais consecutivos:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots \quad 19 \quad 20$$

Uma jogada consiste em colocar um sinal **+** ou **-** no espaço que antecede um desses números. Depois que todos os sinais são colocados, o jogador B ganha em reais o valor absoluto da soma resultante. O jogador A começa. Quanto, no mínimo, o jogador B pode ganhar?

Solução

O jogador B adota a seguinte estratégia. Mentalmente, ele forma os dez pares:

$$(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8),\ \ldots,\ (19,20).$$

Após cada movimento de A, isto é, após o jogador A colocar um sinal antes de um número, a jogada de B consiste em colocar no outro componente do par o sinal o posto ao colocado por seu oponente, exceto para o par $(19,20)$ onde ele coloca o mesmo sinal usado por A.
Desta maneira, o jogador B ganha no mínimo:

$$20+19+\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots(-1)}_{9\ \textit{parcelas}}=30$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Encontre todas as funções $f\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tais que

$$f\Big(x^2+f(y)\Big)=y+\Big(f(x)\Big)^2,\quad \textit{para todo}\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Solução

(Olimpíada Internacional de Matemática - IMO - 1992) Seja $s=f(0)$. Substiutindo $x=0$ na equação dada, obtemos

$$f(0+f(y))=y+\Big(f(0)\Big)^2 \Longleftrightarrow f(f(y))=y+\Big(f(0)\Big)^2=y+s^2,\quad \textit{para todo}\ y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Na equação dada, fazendo $y=0$, obtemos

$$f(x^2+f(0))=0+\Big(f(x)\Big)^2 \Leftrightarrow f(x^2+s)=\Big(f(x)\Big)^2,\ \textit{para todo}\ x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Fazendo $x=0$ em (2), obtemos

$$f(s)=\Big(f(0)\Big)^2 \qquad (3)$$

Para um número real qualquer x, somando membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos

$$s^2+f(x^2+s)=\Big(f(x)\Big)^2+f(s).$$

Aplicando f a ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$(x^2+s)+s^4=s=f(f(x))^2=s+(x+s)^2 \Rightarrow 2xs^2=0.$$

Como x é um número real qualquer, concluímos que $s = 0$. Isto é, $f(0) = 0$.
Assim, podemos escrever as iguladades (1) e (2) como:

$$f(f(y)) = y, \ para\ todo\ y \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

$$f(x^2) = \Big(f(x)\Big)^2, \ para\ todo\ x \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

Portanto, pela igualdade (4), temos que

$$f(x) \geq 0, \ para\ todo\ x \geq 0$$

Se $f(x) = 0$, para algum $x \in \mathbb{R}$, temos, de (3) e (4), que

$$0 = f(0) = f(f(x)) = x.$$

Logo,

$$f(x) > 0, \ para\ todo\ x > 0 \qquad (6)$$

Substituindo y por $f(y)$ na equação dada e fazendo o uso das igualdades (4) e (5), obtemos

$$f(x^2 + y) = f(y) + f(x^2) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y), \ para\ todo\ x \geq 0\ e\ para\ todo\ y \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

Por (7), concluímos que f é monótona e estritamente crescente. Supondo $x > y$, que é equivalente a $x - y > 0$, por (6) e (7), temos

$$f(x) = f[(x-y) + y] = f(x-y) + f(y) > f(y).$$

Assim, temos

$$f(x) > f(y), \ se\ x > y.$$

Se $f(x) > x$, então $x = f(f(x)) > f(x)$.
De maneira análoga, $f(x) < x$, então $x < f(x)$.
Portanto, concluímos que $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.