OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

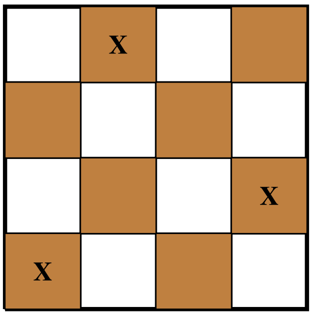
LISTA SEMANAL Nº 10 - Data 04/04/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

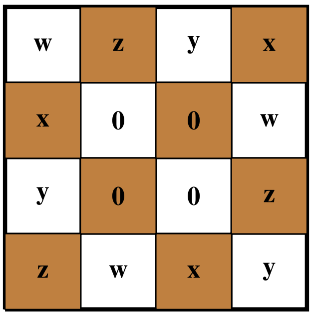
Escreve-se um número em cada uma das 16 casas de um tabuleiro 4×4. Para qualquer casa, a soma dos números escritos nas casas que tem um lado comum com ela é igual a 1. Determine a soma dos 16 números escritos nas casas do tabuleiro.

Solução

(Torneio das Cidades - 2000) A resposta é 6.
Pinte as casas do tabuleiro alternadamente branca e marron. Cada casa branca é vizinha, com um lado comum, de uma das casas marrons assinaladas, veja figura a seguir.



Observe que, pela hipótese do problema, podemos concluir que a soma dos números nas casas brancas é igual a 3. Resta mostrar que a soma dos números nas casa marrons é igual a 3. Para isso, preencha o centro do tabuleiro com 0 e as demais casas como na figura a seguir.

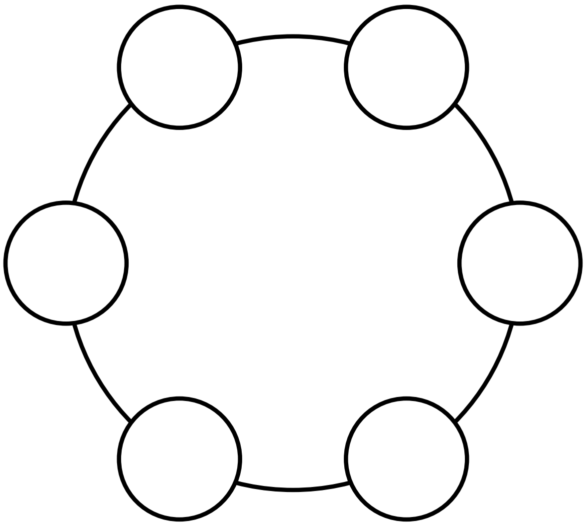


Como $x+z=1$ e $y+w=1$, segue que a soma dos números escritos nas casas do tabuleiro é igual a

$$3(x+z)+3(y+w)=3\cdot 1+3\cdot 1=3+3=6.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

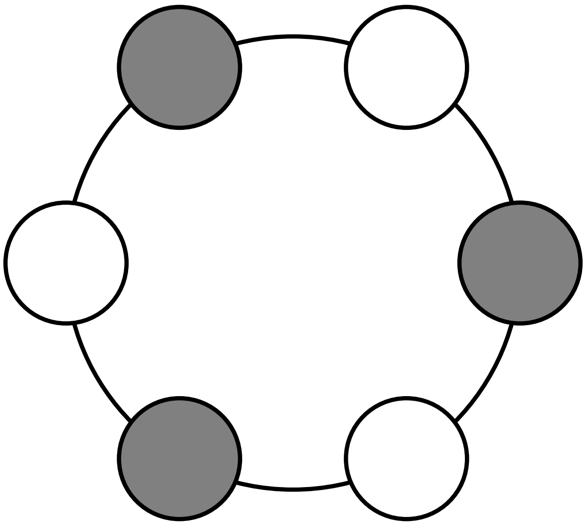
Coloca-se uma ficha em cada um dos seis círculos da figura a seguir.



O jogador pode escolher quaisquer duas fichas e movimentá-las em direções opostas pelo mesmo número de passos. O objetivo é colocar todas as fichas num mesmo círculo, formando uma pilha.
(a) O jogador consegue alcançar seu objetivo? Se ele consegue, descreva um método. Se não, prove que isto é impossível.
(b) E se, em vez de seis, fossem 10 círculos?

Solução

(a) É impossível.
Pintemos os círculos alternadamente de branco e preto, veja figura a seguir.



Seja S a quantidade de fichas nos círculos brancos em determinado instante. Inicialmente, $S = 3$. Observe que, após cada movimento do jogador, ou S aumenta de 2, ou S diminui de 2 ou S não se altera. Ora, isto significa que S permanece um número ímpar durante todo o jogo. Por outro lado, se todas as fichas ficarem num mesmo círculo, formando uma pilha com seis fichas, teremos: ou $S = 6$ ou $S = 0$, que são dois números pares. Portanto, é impossível colocar todas as fichas num mesmo círculo.
(b) Neste caso, é possível.
Observe que $n = 10 = 2 \cdot 5$. Ou seja, $n = 2k$, com k um número natural ímpar. Vamos mostrar que, no

caso em que $n = 2k$, com k um número natural ímpar, é possível colocar todas as fichas num mesmo círculo

Numere os círculos consecutivamente, no sentido horário, por: $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Suponha que, em determinado instante, tenhamos a_i fichas no círculo numerado com i e seja S a expressão da soma das fichas nos círculos nesse instante. Isto é:

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot a_n$$

Observe que, inicialmente $a_i = 1$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, inicialmente temos:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \ldots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Após cada movimento, acontece o seguinte com o valor da expressão da soma das fichas em cada um dos n círculos: ela não se altera ou ela se altera por n. Por exemplo, para $n = 6 = 2 \times 3$. Inicialmente temos:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = \frac{6(6+1)}{2} = 21.$$

Se fizermos o movimento de colocar a ficha do círculo de número 2 para o círculo de posição 4 e passar a ficha do círculo da posição 6 para o círculo da posição 4, a expressão S, que inicialmente é 21, torna-se:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 1 + 3 + 12 + 5 = 21.$$

Por outro lado, fizermos o movimento de colocar a ficha do círculo de número 2 para o círculo de posição 4 e passar a ficha do círculo da posição 1 para o círculo da posição 5, a expressão S, que inicialmente é 21, torna-se:

$$S = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 3 + 8 + 10 + 6 = 27.$$

Assim, após vários movimentos a soma S torna-se

$$S = \frac{n(n+1)}{2} + q \cdot n, \quad onde\ q \in Z.$$

Agora, quando todas as fichas encontram-se no círculo de número k, temos

$$S = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + \ldots + (k-1) \cdot 0 + k \cdot n + (k+1) \cdot 0 + \ldots + n \cdot 0 = k \cdot n.$$

Assim, temos

$$\frac{n(n+1)}{2} + q \cdot n = k \cdot n \iff \frac{n+1}{2} + q = k \iff n + 1 = 2k - 2q \iff n = 2(k-q) - 1.$$

Portanto, n tem de ser um número ímpar, que é uma condição necessária para que o jogador possa alcançar seu objetivo. É fácil mostrar que esta condição é também suficiente. De fato, podemos destacar qualquer um dos círculo, digamos o círculo numerado com 1. Como n é um número ímpar, os restantes $n-1$ círculos podem ser agrupados em pares. Cada par é formado por dois círculo escolhidos de modo que ambos estejam à mesma distância do círculo 1, sendo que colocados em direções opostas. Isto é, os pares são formados pelos círculos numerados por $(i, n-i+2)$, para $i = 2, 3, \ldots, n$. As fichas dos dois círculos que formam um par podem ser levadas para o círculo numerado com 1 em um movimento. Portanto, neste caso, o jogador pode colocar todas as fichas num mesmo círculo, formando uma pilha.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Encontre todos os pares de números inteiros maiores do que 1, cujo produto de seus elementos seja 999.991. (Considere a ordem dos elementos do par como **irrelevante**)

Solução

Observe que:

$$999.991 = 1.000.000 - 9 = 1000^2 - 3^2 = (1000+3) \cdot (1000-3) = 1003 \cdot 997.$$

Agora, recordando: um número inteiro maior do que 1, m, é dito ser um **número primo** se não pode ser escrito como produto de dois números inteiros a, b, com $1 < a < m$, e $1 < b < m$. Isto é, m **não** é primo se $m = ab$, com $1 < a < m$, e $1 < b < m$. Neste caso, os números a, b são chamados **divisores de m**.
Por outro lado, se o número inteiro m **não** é primo e $a \geq b$, segue que $m = ab \geq a \cdot a = a^2$, o que implica $a \leq \sqrt{m}$. Isto significa que, um número inteiro não é primo, se ele possui um divisor $a \leq \sqrt{m}$.
Assim, é fácil ver que o número 997 é primo, pois $31 < \sqrt{997} < 32$ e nenhum dos números primos: 2, 3, 5 , 7, 11, 13,, 17, 19, 23, 29, 31 divide o número 997. Por outro lado, $31 < \sqrt{1003} < 32$ e 17 divide o número 1003: $1003 = 17 \cdot 59$.
Assim, temos

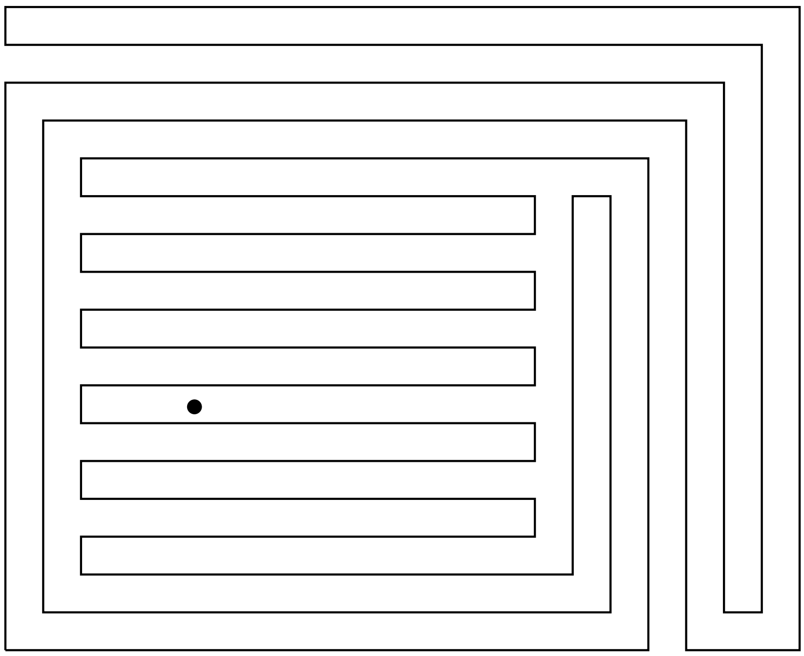
$$991 = 1003 \cdot 997 = 17 \cdot 59 \cdot 997.$$

Portanto, os pares de números inteiros maiores do que 1 (sem considerar a ordem), cujo produto de seus elementos seja 999.991 são:

$$(1003, 997), (17, 59 \times 997), (59, 17 \times 997).$$

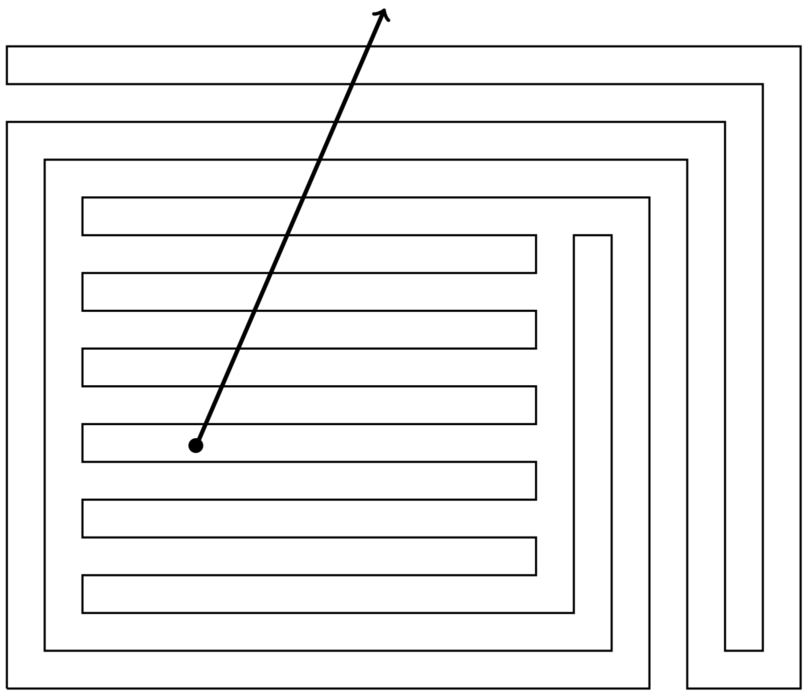
PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Na figura a seguir temos uma curva plana, simples, fechada e um ponto do plano. Diga, justificando, se o ponto dado está na região dentro da curva ou na região fora da curva.



Solução

Este problema a primeira vista parece desconcertante. Felizmente, o problema tem uma solução simples usando a ideia de paridade.
Assim, uma maneira fácil de resolver o problema é desenhar um raio do ponto dado para um ponto fora da curva e contar o número de vezes que este raio cruza a curva. Cada vez que o raio cruza a curva, ele se move de dentro da curva para fora da curva, ou de fora da curva para dentro da curva (isso decorre do Teorema da Curva de Jordan).



Na figura acima, o raio cruza a curva onze vezes. O número ímpar de cruzamentos significa que o ponto está dentro da curva.

OBSERVAÇÃO - (Teorema da Curva de Jordan) Toda curva contínua, simples e fechada no plano, separa o plano em duas regiões disjuntas, o interior e o exterior.