OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 11 - Data 11/04/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Associar a cada uma das letras a, b, c, d, e um dos números 71, 76, 80, 82, 91, sem repetições, de modo que: $a+b$ seja múltiplo de 2, $a+b+c$ seja múltiplo de 3, 2, $a+b+c+d$ seja múltiplo de 4 e 2, $a+b+c+d+e$ seja múltiplo de 5.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Solução

Observe que, como $a+b$ tem de ser divisível por 2, segue que ambos a e b tem de ser pares ou ambos tem de ser ímpares. Assim, temos quatro hipóteses possíveis:

$$a+b=71+91, \quad ou \quad a+b=76+80 \quad ou \quad a+b=76+82 \quad ou \quad a+b=80+82.$$

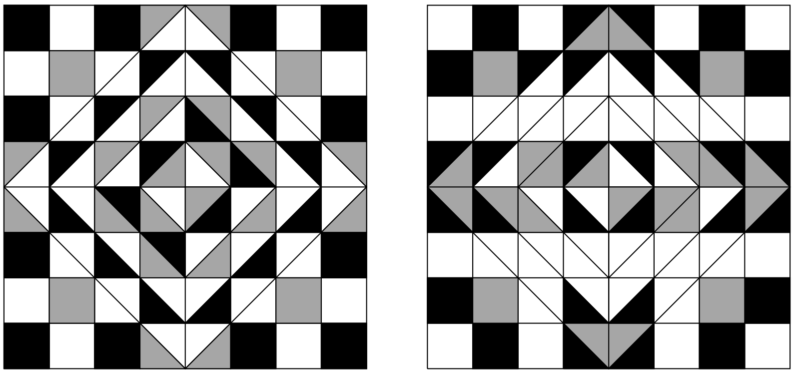
Como a soma $a+b=71+91=162$ é divisível por 3 e, por hipótese, $a+b+c$ tem de ser divisível por 3, segue que c deve ser divisível por 3. Mas, $c\in\{76,\ 80,\ 82\}$, o que concluímos ser impossível. Logo, a hipótese $a+b=71+91$ não ocorre.
Se $a+b=76+80=156$, é divisível por 3 e, por hipótese, $a+b+c$ tem de ser divisível por 3, segue que c deve ser divisível por 3. Mas, $c\in\{71,\ 82,\ 91\}$, o que concluímos ser impossível. Logo, a hipótese $a+b=76+80$ não ocorre.
Raciocínio análogo nos leva a conclusão de que a hipótese $a+b=80+82=162$ não ocorre.
Assim, temos que $a+b=76+82$, nesse primeiro momento, resolve parcialmente o problema.
Como, por hipótese, $a+b+c$ tem de ser divisível por 3, com $c\in\{71,\ 80,\ 91\}$, segue que só existe a possibilidade de $c=91$.
Prosseguindo com este raciocínio, é fácil ver que as associações seguintes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 76 & 82 & 91 & 71 & 80 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 82 & 76 & 91 & 71 & 80 \end{array}$$

resolvem o problema.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Considere os dois tabuleiros 8×8 a seguir com as respectivas pinturas de suas casas.



Tabuleiro 1 Tabuleiro 2

É correto afirmar que: a quantidade de casas brancas no segundo tabuleiro aumenta de $6,9\%$ com relação ao primeiro tabuleiro e que a diferença do número de casas pretas do primeiro e segundo tabuleiros é duas vezes maior do que a diferença das quantidade entre as casas cinzas?

Solução

Contando as casas de ambos os tabuleiros, temos:

	Qte. Casas Pretas	Qte. Casas Brancas	Qte. Casas Cinzas
Tabuleiro 1	21	29	14
Tabuleiro 2	19	32	13

Agora, é fácil ver que a primeira afirmação é falsa e a segunda é verdadeira.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Num tabuleiro quadrado de dimensão 2015×2015, onde cada casa tem as dimensões 1×1, numeram-se as filas, de cima para baixo, de 1 a 2015 e as colunas, da esquerda para direita, de 1 a 2015. Em seguida, pintam-se de preto todas as casas das colunas e linhas numeradas com números pares. Calcular a quantidade de casas pretas do tabuleiro depois da pintura.

Solução

Ao pintar de preto todas as colunas numeradas com números pares, pintamos as colunas:

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2014.$$

Ou seja, pintamos 1007 colunas e cada uma possui 2015 casas. Com isso, pintamos de preto um total de 2015×1007 casas em todas as colunas numeradas com números pares.
Agora, observe que, na contagem das casa pintadas em cada linha numerada com um número par, precisamos contar somente as casas localizadas nas colunas ímpares, pois as casas nas colunas pares já foram contadas acima. Em cada linha, as casas localizadas nas colunas ímpares são as que estão nas colunas:

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2015.$$

Ou seja, um total de 1008 casas. Como são 1007 linhas numeradas com números pares, o total de casas pintadas de preto e ainda não contadas é igual a 1008×1007. Portanto, a resposta é:

$$2015 \times 1007 + 1008 \times 1007 = (2015 + 1008) \times 1007 = 3023 \times 1007 = 3.044.161$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Para dois números reais quaisquer a e b definimos **a média perfeita deles** como sendo a media da soma de suas médias aritmética e geométrica. Encontre quantos são os pares não ordenados, (a, b), com $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$, que possuem a média perfeita sendo um quadrado perfeito.

Solução

Queremos encontrar os pares não ordenados (a, b) tais que

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2} = n^2 \Leftrightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} = n^2 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 4n^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} = 2n,$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Como $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$, então a e b tem de ser ambos quadrados perfeitos e $n \leq 44$.

Suponha que $a \leq b$. Se a é um número quadrado perfeito ímpar, então b também é um quadrado perfeito ímpar. Assim, $a \in \{1, 3^2, 5^2, \ldots, 43^2\}$ e teremos uma quantidade de pares não ordenados igual a: $22+21+\ldots+2+1 = 253$.

De maneira análoga, se a é um número inteiro quadrado perfeito par, segue que b também é um número inteiro quadrado perfeito par. Assim, $a \in \{2^2, 4^2, 6^2, \ldots, 44^2\}$ e teremos uma quantidade de pares não ordenados igual a: $22+21+\ldots+2+1 = 253$.

Portanto, existem $253+253 = 506$ pares não ordenados satisfazendo as condições do problema.