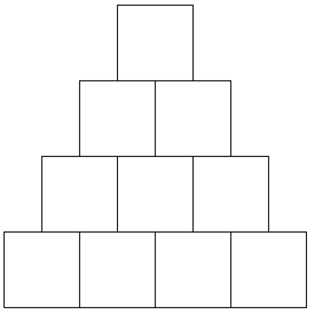
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 12 - Data 18/04/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

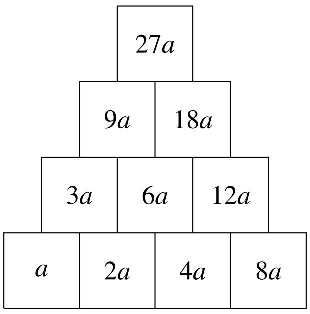
Escrever um número em cada casa da figura a seguir de modo que satisfaçam as seguintes condições:



(i) Em casa da linha inferior, exceto a primeira, o número escrito seja o dobro que o da casa à sua esquerda;
(ii) Nas demais casas, cada número seja igual à soma dos números das casas da fila imediatamente inferior que a tocam.
(iii) A soma dos 10 números escritos seja igual a 2070.

Solução

Chamemos de a o número colocado na casa mais a esquerda da linha inferior. Com isso, as casas serão preenchidas da seguinte forma:



Agora, pela condição (iii), temos:

$$a+2a+4a+8a+3a+6a+12a+9a+18a+27a = 2070 \iff 90a = 2070 \iff a = 23.$$

Portanto, a solução é

621			
207	414		
69	138	276	
23	46	92	184

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Ordenar em uma fila os números naturais de 1 a 20 de modo que as 19 somas de dois números consecutivos na fila sejam números primos.

Solução

Uma resposta seria

20 3 4 7 6 11 8 5 14 17 12 19 18 13 16 1 10 9 2 5

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Encontre a quantidade de possíveis triângulos retângulos não congruentes para os quais o perímetro e a área, medidos em cm e cm^2, respectivamente, sejam numericamente iguais.

Solução

Sejam $a \leq b < c$ os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo qualquer $\mathbf{T}$. Assim, o perímetro de $\mathbf{T}$ é igual a $a+b+c$ e a área de $\mathbf{T}$ é $\frac{ab}{2}$. A razão: (Perímetro) $\div$ (Área) é igual a:

$$\frac{a+b+c}{\frac{ab}{2}} = \frac{2(a+b+c)}{ab} = r.$$

Agora, qualquer triângulo semelhante a $\mathbf{T}$ possui como medidas de seus lados: ka, kb, kc, onde k é um número real positivo. Neste caso, a razão: (Perímetro) $\div$ (Área) é igual a:

$$\frac{ka+kb+kc}{\frac{ka}{2}} = \frac{1}{k}\frac{2(a+b+c)}{ab} = \frac{r}{k}.$$

Tomando na classe dos triângulos semelhantes a $\mathbf{T}$, aquele com $k = r$, teremos que, neste caso, a área é numericamente igual ao perímetro. Como a quantidade de triângulos não semelhantes a $\mathbf{T}$ é infinita, existem infinitos triângulos não congruentes a $\mathbf{T}$ com área numericamente igual ao perímetro.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Um intervalo $\mathbf{I}$ na reta real é um conjunto de pontos x para os quais $a \leq x \leq b$, para um par de números reais a e b com $a < b$. Sejam I_1, I_2, I_3, $\ldots$, I_n uma coleção de intervalo que cobre um intervalo $\mathbf{I}$, isto é $\mathbf{I} \subseteq \cup_{k=1}^{n} I_k$. Prove que, da coleção de subintervalos I_k dados, é possível escolher intervalos mutuamente disjuntos que cobrem pelo menos a metade de $\mathbf{I}$.

Solução

Da coleção de intervalos dados, tome uma sub-coleção formada por intervalos onde cada um deles não é subconjuntos próprio da união de alguns outros. Agora, ordenemos esses sub-intervalos pelo seus extremos à esquerda, de modo que o intervalo I_i comece à esquerda de I_{i+1}, para todo i.
Deste modo, os intervalos I_j e I_{j+2} são disjuntos para cada $j = 1, 2, 3, \ldots, n-2$, caso contrário teríamos $I_{j+1} \subset I_j \cup I_{j+2}$, ou $I_{j+2} \subset I_{j+1}$, que não é possível pelas hipóteses. Assim, a coleção dos intervalos de índice ímpares consiste de subconjuntos mutuamente disjuntos, o que acontece também com a coleção dos intervalos de índice pares. No mínimo uma desas coleções cobre a metade do intervalo $\mathbf{I}$, pois a união das duas coleções cobre o intervalo todo.