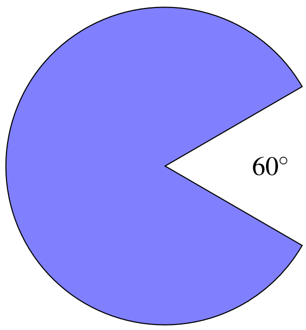
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 13 - Data 25/04/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Em um jogo de eletrônico, o "monstro" é o sector sombreado de um círculo de raio medindo 1cm, veja Figura a seguir.



A peça que falta, a boca do monstro, tem ângulo central $60°$. Encontre, em centímetros, o perímetro do monstro.

Solução

(AHSME - 1985)

Observe que o setor circular tem ângulo central medindo $360° - 60° = 300°$. Agora, observe que, para percorrer o círculo todo descrevemos um ângulo de $360°$ e $\frac{300°}{360°} = \frac{5}{6}$. Assim, o perímetro do setor circular é igual a fração $\frac{5}{6}$ do comprimento do círculo de raio 1 mais o comprimento de duas vezes o raio.

Portanto, o perímetro é igual: $\frac{5}{6}(2\pi \cdot 1) + 2 \cdot 1 = \frac{5}{3}\pi + 2$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Seja K o número natural

$$K = 12345678910111213141516\ldots997998999,$$

que possui como seus dígitos os números inteiros de 1 até 999 escritos em fila e em ordem crescente. Qual é o dígito escrito na posição 2015?

Solução

Vamos dividir os dígitos do número K em três partes: A, B, C, onde A corresponde aos números com 1 dígito, B corresponde aos números com 2 dígitos e C corresponde aos números com 3 dígitos:

$$K = \underbrace{123456789}_{A}\underbrace{10111213141516\ldots99}_{B}\underbrace{100101102103\ldots998999}_{C}.$$

Agora, observe que a parte A é formada por 9 dígitos; a parte B é formada por 2×90 dígitos. Como temos que encontrar o dígito na posição 2015, temos que

$$9+2\times 90+C=2015 \iff C=2015-180-9=1826.$$

Assim, dentre os números listados com três dígitos , temos que contar um total de 1826 dígitos. Por outro lado, como cada um desses números possui 3 dígitos e $1826=608\times 3+2$. Isto significa que vamos atingir a posição 2015 **no segundo dígito** do $609-$ésimo número de três dígitos da lista, começando com $100=99+1$. Ou seja, o dígito escrito na posição 2015 é o segundo dígito (contado da esquerda para direita) do número $99+609=708$. Portanto, o dígito escrito na posição 2015 é igual a 0.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Arrumam-se os números inteiros ímpares positivos, $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,$ em cinco colunas, veja figura a seguir.

	1	**3**	**5**	**7**
15	**13**	**11**	**9**	
	17	**19**	**21**	**23**
31	**29**	**27**	**25**	
	33	**35**	**37**	**39**
47	**45**	**43**	**41**	
	49	**51**	**53**	**55**
...	...	...	...	
	...	...	...	...

Contando da esquerda para direita, identifique a coluna a linha na qual aparece o número 2015.

Solução

Observe que, pelo Algoritmo da Divisão, dados dois inteiros a e b, com $b\neq 0$, existem inteiros $r,\ q$,

unicamente determinados, tais que $a=bq+r$, com $0\leq r<b$. Como sabemos, chamamos o número r de resto da divisão e q o quociente. Por outro lado, se o número inteiro a é ímpar, então o resto da divisão de a por b, tem de ser,**obrigatoriamente**, ímpar.

Agora, olhando para as duas primeiras linhas, é fácil ver que elas são formadas pelos possíveis restos na divisão de um número ímpar por 16.

Observe que a primeira coluna (contada da esquerda para direita) é formada por todos números ímpares que na divisão por 16 deixam resto 15. Ou seja, a primeira coluna é formada por números da forma $16n-1=16n-16+15=16(n-1)+15$, com $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Como

$$2015=16\times 125+15, \qquad (*)$$

é fácil concluir que 2015 está na primeira coluna.

Por outro lado, na primeira linha estão todos os números ímpares entre 0 e 8, na segunda linha estão todos os números ímpares entre 8 e 16, na terceira linha estão todos os números ímpares entre 16 e 24, e assim por diante. Assim, na $n-$ésima linha estão todos os números ímpares entre $8(n-1)$ e $8n$. Como

$$2015=8\times 251+7 \qquad (**),$$

segue que o número 2015 está na linha 252.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre números inteiros positivos $x,\ y$ para os quais $x^y=y^x+1$.

Solução

Vamos dividir o problema em três casos: (i) x = y (ii) x > y e (iii) y > x.

(i) É fácil ver $x \neq y$, pois caso contrário teríamos 0 = 1, que é uma contradição.
(ii) Suponha que $x > y$. Nesse caso, como ambos são números inteiros positivos, teríamos $x = y + n$, com n um número inteiro positivo. Assim,

$$x^y = y^x + 1 \iff (y+n)^y = y^{y+n} + 1 \iff (y+n)^y - y^{y+n} = 1. \qquad (*)$$

Dividindo ambos os lados de $(*)$ por y^y, podemos escrever

$$(y+n)^y - y^{y+n} = 1 \iff \left(1 + \frac{n}{y}\right)^y - y^n = \frac{1}{y^y}.$$

Mas,

$$\left(1 + \frac{n}{y}\right)^y < e^n < 3^n.$$

Se $y = 1$, segue que $x = 1 + n$ e $\left(1 + \frac{n}{y}\right)^y = \left(1 + \frac{n}{1}\right)^1 = (1+n) < 3^n$, o que implica $n = 1$, pois se $n = 2$, teríamos $1 + 2 = 3 < 3^n$, o que acarretaria $n < 1$, que é uma contradição pois n é um inteiro positivo. Logo, temos a solução $x = y + n = 1 + 1 = 2$ e $y = 1$.
Para $y = 2$, teríamos

$$\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 2^n = \frac{1}{2^2} \qquad (**)$$

Observe que na equação $(**)$, se $n \geq 3$, teremos que o lado esquerdo de $(*)$ será negativo, enquanto o lado direito é positivo. Logo, $1 \leq n \leq 2$.
Se $n = 1$, temos que $x = 3$. Neste caso, a solução é $x = 3$ e $y = 2$. Não existem outras soluções para $x > y$.
(iii) Se $x < y$. Nesse caso, como ambos são números inteiros positivos, teríamos $y = x + n$, com n um número inteiro positivo. Assim,

$$x^y = y^x + 1 \iff x^{x+n} = (x+n)^x + 1 \iff x^{x+n} - (x+n)^x = 1. \qquad (***)$$

Dividindo ambos os lados de $(*)$ por x^x, podemos escrever

$$x^{x+n} - (x+n)^x = 1 \iff x^n - \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = \frac{1}{x^x}.$$

De modo análogo ao que foi feito no item (ii), $x < 3$. Por outro lado, se $x = 3$, o primeiro membro de $(***)$ se transforma em

$$3^n - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^3,$$

e para $n \geq 1$ o valor é maior do que o do segundo membro de (***), o que uma contradição. Além disso, para $n > 3$, temos que

$$x^n - \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x > 4^n - e^n > 4^n - 3^n > 1,$$

enquanto $\frac{1}{x^x} < 1$. Logo, no caso em que $y > n$ não há solução nos números inteiros positivos.
Portanto, as soluções são:

$$y = 0 \quad e \quad x \;\; qualquer \;\; inteiro \;\; positvo,$$

$$y = 1 \quad e \quad x = 2, \qquad e$$

$$y = 2 \quad e \quad x = 3.$$