OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 14 - Data 02/05/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Tem-se 15 números inteiros distintos, não necessariamente positivos. Alex escreveu todas as somas possíveis de 7 desses números; Beto escreveu todas as somas possíveis de 8 destes números. Determine se é possível que as listas de Alex e Beto sejam iguais. Se a resposta for sim, exiba os 15 os números possíveis, se não, explicar o porquê.

Solução

(OMA) Sejam a_1, $a_2, \ldots,$ a_7 números naturais. Tomemos o conjunto

$$S = \{0,\ a_1,\ -a_{\ 1},\ a_2,\ -a_2,\ \ldots,\ a_7,\ -a_7\}.$$

Vamos provar que qualquer soma que se obtém com 7 elementos do conjunto S, podemos obtê-la com 8 elementos do mesmo conjunto .
De fato, se formamos uma soma com os elementos $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_7 \in S$, onde o número 0 não esteja entre os escolhidos, então tomando os 8 números $0, b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b-7$ teremos a soma dos 7 números igual a soma dos 8 números.
Agora, imagine que formamos a soma com os 7 números $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_7 \in S$, onde o número 0 esteja entre os escolhidos. Para facilitar o entendimento e sem perda e generalidade, podemos supor que $b_7 = 0$. Assim, dentre os 6 elementos $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_6 \in S$ com certeza algum par de números do tipo $a_i, -a_i$ não está dentre os escolhidos. Logo, podemos escolher os 8 números seguintes $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_6, a_i, -a_i$ cuja soma será a mesma que que dos 7 números $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_7 \in S$, como queríamos. Portanto, cada soma formada com 7 números de pode ser obtida com 8 e cada soma formada com 8 números pode ser obtida com 7. o que implica que as listas são iguais.
Um exemplo desta situação pode ser obtida tomando o conjunto $S = \{0, 1,\ -1, 2,\ -2, \ldots,\ 7,\ -7\}$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Num site de relacionamento através do computador, estão online 19 homens, numerados 1 a 19, e 20 mulheres, numeradas de 1 a 20. O computador faz corresponder cada homem uma mulher compatível, e cada homem é compatível apenas com as mulheres que têm um número maior do que ou igual ao dele (ou seja, o homem de número 19 é apenas compatível com as mulheres numeradas com 19 e 20; o homem de número 18 é compatível apenas com mulheres de números $18, 19, 20,$ e assim por diante). Se cada mulher é compatível com no máximo um homem e n é o número de maneiras que o computador pode estabelecer a conexão entre eles, qual é a fatoração, em fatores primos, do número n?

Solução

(2001 Stanford Math Tournament) Existem 2 maneiras distintas do homem de número 19 estabelecer uma conexão com as mulheres: com qualquer uma das mulheres numeradas com 19 ou 20. Existem, também, 2 maneiras do homem de número 18 se conectar: com qualquer mulher de número 18 ou com a que o homem de número 19 não se conectou. Este argumento continua válido até chegarmos no homem de número 1. Logo, existem 2 opções de conexão para cada um dos 19 homens. Portanto, o número total de conexões é igual a 2^{19}, que é a fatoração pedida.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Seja p um número primo maior do que 5. Prove que p divide um número inteiro cuja representação na base 10 é formada inteiramente de dígitos 1.

Solução

Como p é um número primo maior do que 5, segue que $MDC(p,10) = 1$. Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos que:

$$10^{p-1} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{p-1\ \ 9's} = 9 \times \underbrace{111\ldots1}_{p-1\ \ 1's}$$

é divisível por p. Agora, observe que p sendo um número primo maior do que 5, temos que $MDC(p,3) = 1$, o que implica que p não divide 9 e, portanto, obrigatoriamente, p divide $\underbrace{111\ldots1}_{p-1\ \ 1's}$, como queríamos provar.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, com P, p_1, p_2, p_3 números primos. Prove que um dos primos p_1, p_2, p_3 é igual a 3.

Solução

Observe que o menor número primo é 2, o que implica que P é no mínimo 12. Se nenhum dos números p_1, p_2, p_3 é igual a 3, segue que cada um deles deixa resto 1 ou 2 quando dividido por 3, que é equivalente a dizer que cada um deles é congruente a 1 ou -1 módulo 3. Assim, temos

$$P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \equiv 1 + 1 + 1 = 0\ (mod 3),$$

que é uma contradição com o fato de que P é primo e no mínimo 12. Portanto, no mínimo um dos números p_1, p_2, p_3 é igual a 3.