OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 15 - Data 09/05/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

As doze horas do dia, dois relógios marcam as horas corretamente. A partir deste instante, um dos relógio adianta 1 segundo por hora e o outro adianta 3 segundos em duas horas. Em quantos dias ambos os relógios marcarão as horas corretamente ?

Solução

(CRUX, V. 23 - no. 5, pg.282) O primeiro relógio aumenta 12 horas em $12\times 60\times 60$ horas ou 1800 dias, que corresponde ao tempo em que voltará a marcar as horas corretamente. O segundo relógio aumenta 12 horas em $12\times 60\times 60 \div \frac{3}{2}$ ou 1200 dias.
Portanto, ao final de $3600 = MDC(1800, 1200)$ dias os dois relógios marcarão juntos as horas corretamente.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Numa reunião de um grupo de rapazes e garotas, 15 garotas decidem ir embora. Dos que ficaram, restam dois rapazes para cada garota. Depois disto, 45 rapazes decidem ir embora. Então existem agora 5 garotas para cada rapaz. Quantos rapazes e quantas garotas estavam no grupo original?

Solução

(CRUX, V. 23 - no. 5, pg.279) Sejam r, s a quantidade inicial de rapazes e garotas, respectivamente. Quando 15 garotas vão embora, temos

$$r = 2(g-15) \qquad (*)$$

Depois que 45 rapazes deixam o grupo, temos

$$5(r-45) = g-15 \qquad (**)$$

Assim, de $(**)$ temos:

$$g = 5(r-45)+15 \qquad (***)$$

Substituindo o valor de g de $(***)$ em $(*)$, obtemos

$$r = 2[5(r-45)+15-15] = 2[10r-450] \Leftrightarrow 9r = 450 \Rightarrow r = 50.$$

Logo, de $(*)$, temos $50 = 2(g-15) = 2g-30 \Rightarrow g = 40.$
Portanto, no grupo original estavam 90 pessoas: 50 rapazes e 40 garotas.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Um homem possui uma grande quantidade de selos de apenas dois tipos: selos de 5 reais e selos de 17 reais. Qual é a maior quantidade (finita) de reais que o homem **não** pode atingir com uma combinação destes selos?

Solução

Para facilitar sua visualização, organize todos os inteiros positivos numa tabela com 5 colunas, veja a seguir:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Agora, observe que todos os números na coluna mais à direita são divisíveis por 5 e, portanto, podem ser obtidos simplesmente a partir de um número de selos de 5 reais. Logo, eles podem ser eliminados.

1	2	3	4	...
6	7	8	9	...
11	12	13	14	...
16	17	18	19	...
21	22	23	24	...
26	27	28	29	...
31	32	33	34	...
36	37	38	39	...
41	42	43	44	...
46	47	48	49	...
51	52	53	54	...
56	57	58	59	...
61	62	63	64	...
66	67	68	69	...
71	72	73	74	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Observe que se você pode obter um número da tabela por qualquer combinação dos números dos selos, é possível obter o número diretamente abaixo dele na tabela, basta somar 5. Da mesma forma, você pode encontrar uma solução para o próximo valor para baixo, adicionando outro selo de 5 reias, e assim por diante.

Por outro lado, como se obtém o valor de 17 reais simplesmente com um único selo de 17 reais, podemos eliminar todos os números da segunda coluna a partir de 17, veja a seguir.

1	2	3	4	...
6	7	8	9	...
11	12	13	14	...
16	...	18	19	...
21	...	23	24	...
26	...	28	29	...
31	...	33	34	...
36	...	38	39	...
41	...	43	44	...
46	...	48	49	...
51	...	53	54	...
56	...	58	59	...
61	...	63	64	...
66	...	68	69	...
71	...	73	74	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

De maneira análoga, como podemos obter o número 34 com dois selos de 17 reais, podemos eliminar da quarta coluna da tabela todos os números a partir de 34, veja a seguir.

1	2	3	4	...
6	7	8	9	...
11	12	13	14	...
16	...	18	19	...
21	...	23	24	...
26	...	28	29	...
31	...	33	...	...
36	...	38	...	...
41	...	43	...	...
46	...	48	...	...
51	...	53	...	...
56	...	58	...	...
61	...	63	...	...
66	...	68	...	...
71	...	73	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Como podemos obter o número 51 juntando 3 selos de 17 reais, podemos eliminar todos os números da primeira coluna a partir de 51, veja a seguir.

1	2	3	4	...
6	7	8	9	...
11	12	13	14	...
16	...	18	19	...
21	...	23	24	...
26	...	28	29	...
31	...	33	...	...
36	...	38	...	...
41	...	43	...	...
46	...	48	...	...
...	...	53	...	...
...	...	58	...	...
...	...	63	...	...
...	...	68	...	...
...	...	73	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Finalmente, podemos obter o número 68 juntando quatro selos de 17 reais, o que permite-nos eliminar todos os números da terceira coluna a partir de 68, veja a seguir.

1	2	3	4	...
6	7	8	9	...
11	12	13	14	...
16	...	18	19	...
21	...	23	24	...
26	...	28	29	...
31	...	33	...	...
36	...	38	...	...
41	...	43	...	...
46	...	48	...	...
...	...	53	...	...
...	...	58	...	...
...	...	63	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Assim, é fácil ver que a maior quantidade (finita) de reais que o homem não pode atingir com uma combinação destes selos é 63.

Observação

De uma maneira geral, se você tiver dois números inteiros positivos $m, n,$ relativamente primos, então todo número inteiro maior do que **mn - m - n** pode ser escrito da forma $am+bm$, com m, n números inteiros não negativos, mas o número **mn - m - n** **não** pode.

De fato, suponha que $mn-m-n = am+bn$. Neste caso, $mn-m-am = n+bn = (b+1)n$. Ou seja, $(b+1)n$ é um múltiplo de m e como m, n não tem nenhum fator comum, segue que $b+1$ é um múltiplo de m. Assim, temos que $b+1 \geq m$, o que implica $b \geq m-1$. De modo análogo, temos $a \geq n-1$. Estas duas conclusões implicam que $am+bn \geq 2mn-m-n$. Contradição.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Se p é um número primo, prove que o número inteiro 2^p+3^p não é uma potência (com expoente maior do que 1) de um número inteiro.

Solução

Observe que, se $p=2$, então $2^2+3^2=13$, que não é uma potência .
Se $p=3$, então $2^3+3^3=35$, que não é uma potência.
Se $p=5$, então $2^5+3^5=275$, que não é uma potência.
Por outro lado, se p é um primo ímpar maior do que 5, $p=2k+1$, com $k\in Z$, temos

$$2^p+3^p=2^{2k+1}+3^{2k+1}=(2+3)(2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\ldots+3^{2k})=5\cdot(2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\ldots+3^{2k})$$

Assim, 5 divide 2^p+3^p.
Vamos mostrar que 5^2 não divide 2^p+3^p, o que implica que 2^p+3^p não é uma potência de qualquer inteiro.
De fato, observe que $3\equiv -2\ (mod\ 5)$, o que nos permite escrever que

$$(2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\ldots+3^{2k})\equiv(2^{2k}-2^{2k-1}\cdot(-2)+2^{2k-2}\cdot(-2)^2-\ldots+(-2)^{2k})\ (mod\ 5)$$

$$\equiv 2^{2k}+2^{2k}+2^{2k}+\ldots+2^{2k})\ (mod\ 5)\equiv(2k+1)^{2k}\ (mod\ 5)\equiv p\cdot 2^{p-1}\ (mod\ 5).$$

Agora, como $p\neq 5$, segue que 5 não divide p e também 5 não divide 2^{p-1}, o que conclui a prova.