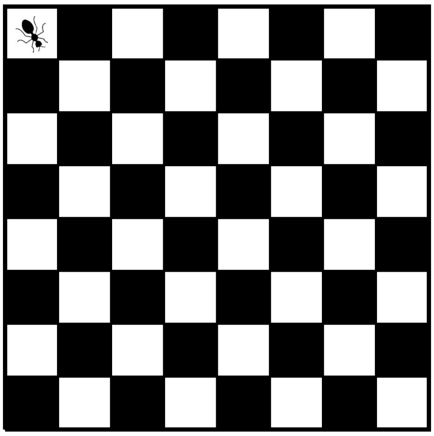
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 16 - Data 16/05/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

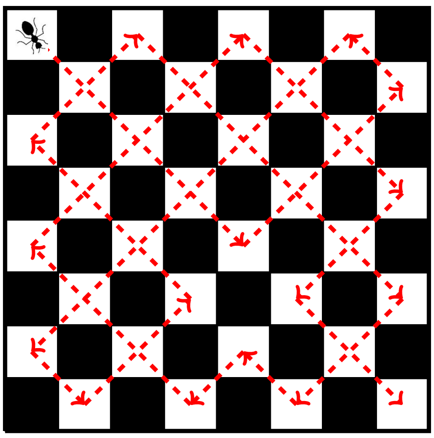
Uma formiga chega à casa superior esquerda de um tabuleiro de xadrez, e então ela decide visitar todos as casas brancas.



Ela quer fazer isso sem nunca entrar numa casa preta ou passar mais de uma vez pelo mesmo cruzamento de uma linha horizontal com uma linha vertical do tabuleiro. A formiga vai poder realizar seu desejo? Se sim, mostre a rota que a formiga percorrerá. Se não, explique.

Solução

Sim, ela vai conseguir realizar seu desejo. Basta a formiga fazer o seguinte percurso:



PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Qual é maior quantidade de inteiros de 1 e 100 inclusive que podemos escolher de modo que a soma de dois quaisquer seja um múltiplo de 6?

Solução

A resposta é 17.
É fácil ver que, dentre os números inteiros de 1 e 100 inclusive, existem 16 múltiplos de 6: $6,\ 12,\ 18,\ \ldots,\ 90,\ 96$. É bom lembrar que os múltiplos de 6 são os números inteiros que deixam resto zero na divisão por 6 e, neste caso, a soma de dois quaisquer múltiplos de 6 resulta num múltiplo de 6. A primeira vista, poderíamos pensar que a resposta é 16. Mas, é possível encontrar 17 números satisfazendo ao problema.
De fato, para que a soma de dois quaisquer números nas condições do problema resulte num múltiplo de 6, teremos uma outra alternativa, que é buscar aqueles números inteiros cujo resto da divisão por 6 seja 3, pois se tomarmos dois números quaisquer, a, b, que deixam reto 3 na divisão por 6, temos

$$a = 6q+3 \;\; e \;\; b = 6t+3, \quad onde\ q,\ t \in Z \Rightarrow \;\; a+b = 6q+6t+3+3 = 6(q+t)+6 = 6(q+t+1).$$

Agora, a quantidade de números inteiros 1 e 100 inclusive que deixam resto 3 na divisão por 6 é 17: $\{3,\ 9,\ 15,\ 21, \ldots,\ 93,\ 99\}$.
Portanto, 17 é a resposta.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Alice e Bob disputam um jogo chamado **"Diga 100 e ganhe"**. As regras são as seguintes:

(i) No início, um juiz usa um dado comum de seis faces para obter um número aleatório de 1 a 6. Vamos chamar este número de n.
(ii) Alice começa e fala um número k, onde $n < k \leq n+10$.
(iii) Bob faz sua jogada depois de Alice e diz um número m, onde $k < m \leq k+10$.

Eles jogam alternadamente seguindo as regras acima. Cada um tem que falar um número maior do que o que disse seu adversário, mas não maior que **10 + número anterior**.
A pessoa que falar 100 ganha o jogo. Sabemos que Alice e Bob são pessoas inteligentes e fazem sempre suas melhores jogadas.
Quem vence o jogo: Alice ou Bob? Qual é a probabilidade de cada jogador vencer o jogo? Qual é a estratégia para vencer?

Solução

Alice ganha com a probabilidade de $\frac{5}{6}$ e Bob ganha com a probabilidade de $\frac{1}{6}$.
O jogador que atinge 89 vence, porque o opositor, então tem que somar de 1 a 10 a esse número, tornando-se possível dizer 100. Portanto, pelo mesmo raciocínio, quem vence é quem atinge o número 78. Continuando a subtrair 11 da mesma forma, até chegar ao número 12. Assim, quem atingir o número 12 vence. Ou seja, as posições vencedoras são: $12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 67,\ 78,\ 89$.
Se ao rolar o dado, o número for maior do que 1, então Alice, na sua primeira jogada, vai poder atingir o número 12 e, consequentemente, com as jogadas posteriores vai atingir a todas as posições vencedoras, ganhando o jogo.
Alice só não ganha o jogo se no início, ao rolar o dado, o número for igual a 1, o que a impossibilita de atingir o número 12. Portanto, Alice tem a probabilidade $\frac{5}{6}$ de vencer o jogo, enquanto Bob tem a probabilidade de $\frac{1}{6}$ de vencer.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

A sequência

$$S = (s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ a_4,\ \ldots) = (3,\ 7,\ 47,\ 2207, \ldots)$$

começa com $s_0 = 3$ e os termos seguintes satisfazem a relação

$$s_n = s_{n-1}^2 - 2.$$

Da sequência S podemos formar outra sequência

$$T = (\sqrt{3},\ \sqrt{\sqrt{3 \cdot 7}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 47}}},\ \ldots).$$

Para qual limite converge a sequência T?

Solução

É fácil ver que $t_k = (t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \ldots t_{k-1})^{\frac{1}{2^k}}$. Agora, observe que,

$$s_0^2 = 3 = a + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, pela hipótese, temos

$$s_1 = s_0^2 - 2 \ \Rightarrow s_1 = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2 = a^2 + a^{-2}.$$

É fácil ver que, de uma maneira geral temos:

$$s_k = a^{2k} + \frac{1}{a^{2k}} = a^{2k} + a^{-2k}.$$

Assim, podemos escrever

$$t_k = (t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \ldots t_{k-1})^{\frac{1}{2^k}} = \left[(a + a^{-1}) \cdot (a^2 + a^{-2}) \cdot \ldots \cdot (a^{2^{k-1}} + a^{-2^{k-1}})\right]^{\frac{1}{2^k}}.$$

Agora, observe que

$$s_k = a^{2^k} + a^{-2^k} \Rightarrow a^{2^k} < s_k < 2a^{2^k}.$$

Como $a > 1$, podemos escrever:

$$a^{2^k} < a^{2^k} + a^{-2^k} = s_k < a^{2^k} + 1 < 2a^{2^k},$$

que nos leva a concluir que

$$a^{2^0} \cdot a^{2^1} \cdot a^{2^{k-1}} < s_0 s_1 s_2 \ldots s_{k-1} < 2^k \cdot a^{20} \cdot a^{2^1} \ldots a^{2^{k-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}} < s_0 s_1 s_2 \ldots s_{k-1} < 2^k \cdot a^{1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}} \Leftrightarrow a^{2^k-1} < s_0 s_1 s_2 \ldots s_{k-1} < 2^k \cdot a^{2k-1},$$

que é equivalente a

$$a^{1-(\frac{1}{2^k})} < (s_0 s_1 s_2 \ldots s_{k-1})^{\frac{1}{2^k}} < 2^{\frac{k}{2^k}} \cdot a^{1-(\frac{1}{2^k})}.$$

Como a fração $\frac{k}{2^k}$ tende a zero quando k tende ao infinito, segue que o limite procurado é igual a $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, que é exatamente igual ao quadrado da razão áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.