OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 17 - Data 23/05/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Beatriz tem três dados em cujas faces estão escritas letras diferentes, uma letra por cada face. Ao lançar os três dados sobre a mesa quatorze vezes, e escolhendo somente as letras das faces acima, formamos as seguintes palavras:

$$OSA,\ VIA,\ OCA,\ ESA,\ SOL,\ GOL,\ FIA,\ REY,\ SUR,\ MIA,\ PIO,\ ATE,\ FIN,\ VID.$$

Determinar as seis letras escritas nas faces de cada dado.

Solução

(Olimpíada de Maio 2014 ,N1, P2) Vamos chamar os três dados de: **dado 1, dado 2, dado 3**. Observe que, cada uma das três letra de cada palavra formada estão escritas em dados distintos. Nosso objetivo é identificar, para cada um dos dados, as letras escritas em suas seis faces.
Sem perda de generalidade, vamos supor que, na palavra OSA, a letra O está no dado 1, a letra S está no dado 2 e A está no dado 3.
Observe que, na palavra OCA, a letra C está escrita no dado 2, pois as duas outras letras, O e A, estão escritas nos dados 1 e 3, respectivamente.
Do mesmo modo, examinando a palavra ESA, podemos concluir que a letra E está no dado 1, pois as letras S e A estão nos dados 2 e 3, respectivamente.
Deste modo, as palavras SOL e GOL nos leva a concluir que L está no dado 3 e G está no dado 2.
A palavra ATE nos leva à conclusão de que a letra T está no dado 2, pois já concluímos que A está no dado 3 e no dado 1.
Examinando as palavras PIO e VIA, podemos concluir que a letra P não pode está no dado 1, pois O está no dado 1, e que I não pode está no dado 3, pois A está no dado 3. Assim, I está no dado 2 e P está no dado 3.
Do mesmo modo, examinando as palavras FIA e MIA, concluímos que F e M estão no dado 1.
Olhando para as palavras FIN e VID, podemos concluir que as letras N e D estão escritas no dado 3.
A palavra REY nos leva a conclusão de que R não pode está escrita no dado 1, pois E está escrita no dado 1. A palavra SUR nos leva a conclusão de que a letra R não pode está no dado 2, pois S está escrita no dado 2. Logo, a letra R está escrita no dado 3. Daí se conclui que Y está na dado 2 e U está no dado 1.
Portanto, os dados tem em suas faces:

- **Dado 1: O, E, V, F, M, U**;
- **Dado 2: S, C, G, T, I, Y**;
- **Dado 1: A, L, P, N, D, R**.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Dadas 6 bolinhas de mesmas dimensões: 2 brancas, 2 verdes e 2 vermelhas, sabe-se que existe uma branca, uma verde e uma vermelha que pesam 99 gramas cada uma e que as restantes pesam 101 gramas cada uma. Determinar o peso de cada bolinha usando duas vezes uma balança de dois pratos.
Observação A balança de dois pratos somente informa se as bolinhas colocadas no prato esquerdo pesa mais, ou menos, ou igual, que as bolinhas colocadas no prato direito.

Solução

(Olimpíada de Maio 2014 N1) Vamos chamar as bolinhas brancas de B_1 *e* B_2; as bolinhas verdes de V_1 *e* V_2 e as bolinhas vermelhas de R_1, *e* R_2.
Colocamos uma bolinha branca e uma bolinha verde num dos pratos da balança, digamos B_1 *e* V_1, e no outro prato uma bolinha branca e uma vermelha, digamos B_2 *e* R_1.
Existem duas possibilidades:

- Os pratos ficam equilibrados;
- Um prato sobe e o outro desce.

Se os pratos ficam equilibrados.
Neste caso, como as bolinhas brancas tem pesos distintos, para ter equilíbrio podemos concluir que, em cada prato existe uma bolinha mais leve e uma mais pesada.
Agora, na segunda pesagem, comparamos os pesos das bolinha V_1 e R_1, que obrigatoriamente possuem pesos distintos.
Se a balança se inclina para a bolinha vermelha R_1, temos que os pesos são distribuídos da seguinte maneira:

$$B_1 = 99\ gr;\ B_2 = 101\ gr;\ R_1 = 101\ gr;\ R_2 = 99\ gr;\ V_1 = 99\ gr;\ V_2 = 101\ gr.$$

Se o prato contendo as bolas B_1 *e* V_1 sobe.
Neste caso, o total dos pesos de B_1 *e* V_1 é menor do que o total dos pesos de B_2 *e* R_1, o que implica que o peso de B_2 é maior do que o peso de B_1. Isto implica que, para os pesos do par $(V_1,\ R_1)$ existem três possibilidades:

- (leve, leve);
- (pesada, leve);
- (leve, pesada).

A possibilidade $(V_1,\ R_1) = (pesada,\ leve)$ não pode acontecer.
Agora. na segunda pesagem, comparamos os pesos das bolinhas $B_1,\ B_2$ com os pesos das bolinhas $V_1,\ R_1$.
Se os pratos ficam equilibrados, concluímos que o peso da bolinha V_1 é menor do que o peso da bolinha R_1.
Se o total dos pesos das bolinhas $B_1,\ B_2$ for menor que o total dos pesos das bolinhas $V_1,\ R_1$, então cada uma das bolinhas V_1 R_1 pesam 101 gr.
Se o total dos pesos das bolinhas $B_1,\ B_2$ for maior que o total dos pesos das bolinhas $V_1,\ R_1$, então cada uma das bolinhas V_1 R_1 pesam 99 gr.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Ana e Lucas disputam o seguinte jogo. Ana escreve uma lista com $n \geq 4$ números inteiros distintos. Lucas ganha se pode escolher, da lista de Ana, quatro números distintos a, b, c e d, de modo que o número $a+b-(c+d)$ seja múltiplo de 20. Determinar o valor mínimo de n para que, qualquer que seja a lista de Ana, Lucas sempre vença.

Solução

(Olimpíada de Mayo 2014 N2 P3 e Shortlisted Problems 1998 - No.16) A resposta é 9.
Vamos mostrar que, com qualquer lista de 9 números inteiros, Lucas pode escolher quatro números inteiros distintos, a, b, c, d, tais que $a+b(c+d)$ seja múltiplo de 20.
Sejam $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ os nove números da lista de Ana e sejam $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$ os respectivos restos na divisão dos nove números por 20. división por 20.
Se entre estes restos existem pelo menos 7 diferentes, com $7R$ destes estos poderíamos forma $\frac{7\times 6}{2}=21$ pares distintos, o que garante que Lucas poderá escolher os pares (a,b) e (c,d) tais que las somas $a+b+c+d$ tenham o mesmo resto na divisão por 20 e a, b, c, d sejam distintos, pois se $a=b$ e $a+b=c+d$, então $b=$. Estes dois pares permitem que Lucas ganhe o jogo.
Si entre os restos na divisão por 20, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$, existem no máximo seis valores distintos, pode-se garantir que entre eles haverá um que pareça quatro vezes, o ainda dos distintos haverá um que apareça pelo menos duas vezes. No primeiro caso, suponhamos sem perda de generalidade que tenhamos $x_1=x_2=x_3=x_4$. Neste caso, Lucas escolhe $a=a_1$, $b=a_2$, $c=a_3$, $d=a_4$, e assim, teremos $a+b(c+d)$ um múltiplo de 20.
No segundo caso, suponhamos que $r_1=r_2$ e $r_3=r_4$. Então, Lucas escolhendo $a=r_1$, $b=r_3$, $c=r_2$ e $d=r_4$, terá a garantia de que $a+b(c+d)$ será um múltiplo de 20 e ele ganhará.
Com menos de 8 números Lucas não tem como garantir que ganhará. Por exemplo, se Ana apresenta, por exemplo, a lista

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 12,\ 20,\ 40,\ 60,$$

qualquer que seja a escolha de quatro números quatro números que Lucas faça, $a+b-(c+d)$ não será um múltiplo de 20. De fato, sustituindo cada número pelo seu resto na divisão por 20 teremos a lista, possivelmente, reordenada:

$$0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 12$$

na qual dois números quaisquer tem soma menor do que 20, e que um dos números é maior que a soma de dois menores. Desta forma, $a+b-(c+d)$ com a, b, c, d escolhidos dentre os números do conjunto

$$\{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 12\}$$

será sempre menor que 20, o que significa que os números correspondentes na lista original não permitirão a vitória de Lucas.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Consideremos um polígono convexo com n lados, com $n \geq 5$. Provar que existem no máximo $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ triângulos da área 1 com os vértices entre os vértices do polígono.

Solução

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os vértices do polígono convexo.
Vamos considerar três tipos de segmentos:

- os lados do polígonos, segmentos do tipo P_iP_j, cuja quantidade é n;
- as diagonais da forma P_iPi+2, cuja quantidade é n;

- os outros tipos de diagonais, cuja quantidade é: $\frac{n(n-3)}{2} - n = \frac{n(n-5)}{2}$.

Seja T a quantidade de triângulos com área 1, e $3T$ a quantidade de segmentos P_iP_j que são lados destes triângulos.
Agora, observe que, cada segmento do primeiro tipo (os lados) não podem ser lados de mais de dois triângulos com área 1, porque se fossem lados de três triângulos, então o polígono não seria convexo.
De maneira análoga, as diagonais da forma P_iPi+2, não podem ser lados de mais de 3 triângulos com área 1. e as outras diagonais de no máximo 4 triângulos.
Então, isso significa que

$$3T \leq 2n + 3n + 4 \cdot \frac{n(n-5)}{2} = 2n^2 - 5n \Longrightarrow 3T \leq n(2n-5)T \leq \frac{n(2n-5)}{3}.$$