OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

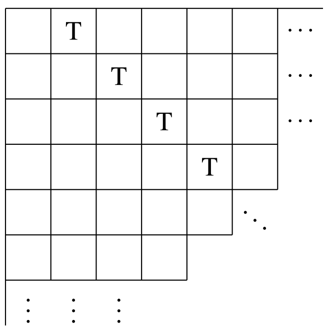
SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 18 - Data 18/07/2016

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Quando colocamos num tabuleiro uma torre (peça do jogo de xadrez), que vamos denotar por **T**, esta ataca todas as casas que estão numa mesm linha ou coluna. No tabuleiro 4×4 a seguir, colocamos duas torres e verificamos que elas atacam 10 casas.

	*	*	
	*	*	
*	*	T	*
*	T	*	*

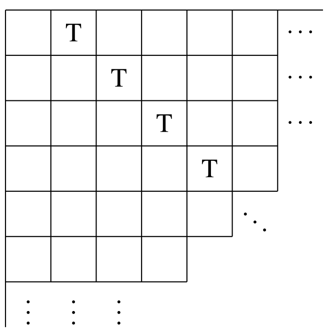
Se colocarmos quatro torres num tabuleiro 100×100 da maneira mostrada a seguir



quantas casas atacam essas quatro torres?

Solução

Quando consideramos as quatro primeiras linhas do tabuleiro, a quantidade de casas atacadas pelas quatro torres é igual a $4 \times 100 - 4 = 396$, veja na figura a seguir.
Se colocarmos quatro torres num tabuleiro 100×100 da maneira mostrada a seguir.



Agora, resta contar as casas atacadas que estão nas colunas 2, 3, 4 e 5, que, como é fácil ver, formam um retângulo com 96 linhas e 4 colunas. Portanto, o número total de casas atacadas pelas quatro torres é igual a:

$$396 + 4 \times 96 = 780.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Sejam A e B dois números inteiros positivos. Dizemos que A **é filho de** B, se $A < B$, A e um divisor de B e, além disso, a soma dos dígitos de A é igual a soma dos dígitos de B.
Por exemplo, 12 é filho de 300, pois $12 < 300$, 12 é divisor de 300, e, além disso, $1+2=3=3+0+0$.
Quantos **filhos** possui o número 110.000?

Solução

Temos que a decomposição de 110.000 em fatores primos é dada por:

$$110.000 = 2^4 \times 5^4 \times 11.$$

Agora, observe que um filho, A, de $B = 110.000$ tem de ter 2 como a soma dos seus dígitos. Assim, temos os dois casos possíveis:

- A começa com 2 e todos seus outros dígitos serão iguais a zero.
  Neste caso, é fácil ver que os filhos de 110.000 são:

$$2 = 2^1;$$

$$20 = 2^2 \times 5^1;$$
$$200 = 2^3 \times 5^2;$$
$$2000 = 2^4 \times 5^3.$$

- O dígito 1 aparece duas vezes em A e os restantes dos dígitos são todos iguais a zero.
  Neste caso, é fácil ver que A começa com 1.
  Agora, observe que, se o número $A = \underbrace{100\ldots0}_{n\ zeros}1\underbrace{00\ldots0}_{m\ zeros}$ é filho de $B = 110.000$ então o número $\underbrace{100\ldots0}_{n\ zeros}1$ também é filho de $B = 110.000$. Mas, o número $\underbrace{100\ldots0}_{n\ zeros}1$ não é divisível nem por 2 (não é par) nem por 5 (não termina em zero ou cinco). Isto implica que o número A, que é divisor de $B = 110.000$, só possui o fator 11, o que implica que a quantidade de zero é nula, ou seja $n = 0$.
  Logo, neste caso, os filhos de $B = 110.000$ são:

$$11, \qquad 110, \qquad 1100, \qquad e \qquad 11000.$$

Portanto, o número inteiro 110.000 possui um total de $4+4=8$ filhos.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Existem 7 caixas dispostas em linha reta, uma após a outra, numeradas de 1 a 7. Você possui uma pilha contendo 2016 cartões e pretende colocá-los um por um dentro das caixas. O primeiro cartão é colocado na caixa de número 1, o segundo é colocado na caixa de número 2 e, assim por diante, até o sétimo cartão, que é colocado na caixa de número 7. Então começa a organizar os cartões na outra direção, colocando o oitavo cartão na caixa de número 6, o nono cartão na caixa de número 4, até o décimo terceiro cartão, que é colocado na caixa de número 1. O décimo quarto cartão é então colocado na caixa de número 2, e isto continua até que todos os cartões sejam distribuídos.
Qual é o número da caixa em que será colocado o último cartão?

Solução

A resposta é 2.
O primeiro cartão você coloca na caixa de número 1 e você só volta a visitar esta caixa quando vai colocar o décimo terceiro cartão. Sua terceira visita à caixa de número 1 você fará quando for colocar o vigésimo quinto, e assim por diante. Logo, você visita a primeira caixa a cada 12 cartões, começando com o cartão de número 1.
Como o número inferior a 2016 que está na caixa de número 1 e mais próximo de 2016 é o número $2005 = 167 \times 12 + 1$, segue que, pelas hipóteses do problema, o $2006 - n$ésimo cartão será colocado na caixa de número 2, o $2007 - n$ésimo cartão será colocado na caixa de número 3, etc. Logo o $2016 - n$ésimo cartão, o último cartão, será colocado na caixa de número 2.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Mostre que a equação
$$m^{n^m} = n^{m^n}$$
não admite solução nos inteiros positivos ($m \neq n$).

Solução

Sem perda de generalidade, vamos supor que $n > m \geq 1$.
Se $m = 1$, ou se $n = 2$ e $n = 3$ *ou* 4, temos que
$$m^{n^m} > n^{m^n}.$$
Suponha que $m = 2$ e $n > 4$.
Como $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ é uma função decrescente para $x > e$, temos que
$$4^{\frac{1}{4}} > n^{\frac{1}{4}},\ ou\ 4^n > n^4,\ ou 2^n > n^2,\ ou\ n^{2^n} > 2^{n^2},$$
e $n^{m^n} > m^{n^m}$.
Finalmente, suponha que $n > m \geq 3$. Neste caso, temos
$$m^{\frac{1}{m}} > n^{\frac{1}{n}}, u\ m^n > m^n,$$
e novamente temos $n^{m^n} > m^{n^m}$.
Segue que a equação $m^{n^m} = n^{m^n}$ não admite solução no conjunto dos números inteiros positivos.