XXVII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - 24/09/2016

PROVA DO NÍVEL II

PROBLEMA 1

Dois amigos, Jairo e Alexandre, divertem-se brincando com números. Jairo escolhe três números inteiros e escreve-os no quadro. Alexandre escolhe dois deles, calcula sua média aritmética e soma o resultado com o terceiro número. Se Alexandre obteve um final possível com os números 42, 13 e 37, quais foram os números escolhidos por Jairo?

Solução

Sejam x, y, z os três números escolhidos por Jairo. Temos que:

$$\frac{x+y}{2}+z=42$$

$$\frac{y+z}{2}+x=13$$

$$\frac{x+z}{2}+y=37.$$

Somando membro a membro as três equações, obtemos:

$$\left(\frac{x+y}{2}+z\right)+\left(\frac{y+z}{2}+x\right)+\left(\frac{x+z}{2}+y\right)=42+13+37 \Leftrightarrow (x+y+z)+(x+y+z)=92 \Leftrightarrow$$

$$x+y+z=46.$$

Agora, observe que

$$46=x+y+z \Leftrightarrow \frac{46}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{z}{2} \Leftrightarrow 23+\frac{z}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}$$

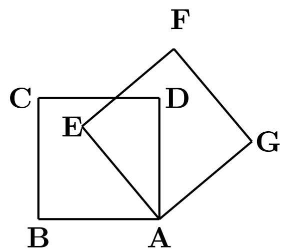
Portanto, temos

$$23+\frac{z}{2}=\frac{x+y}{2}+z \Leftrightarrow 23+\frac{z}{2}=42 \Leftrightarrow \frac{z}{2}=19 \Rightarrow z=38.$$

De modo análogo, temos $x=-20$ e $y=28$.

PROBLEMA 2

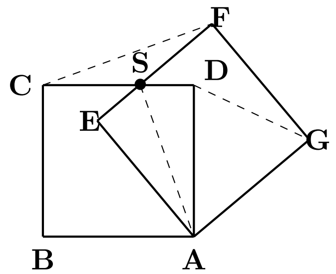
Na Figura a seguir mostramos os quadrados $ABCD$ e $AEFG$ tais que os comprimentos $\overline{AB}=\overline{AG}$.



Se a medida do ângulo $E\hat{A}B$ é igual a $50°$, determine, em graus, a soma das medidas dos ângulos $F\hat{C}D$ e $D\hat{G}A$.

Solução

Seja S o ponto de interseção dos segmentos CD e EF. Construindo o segmento AS, como $\overline{AE} = \overline{AD}$ e $m(A\hat{E}S) = m(A\hat{D}S) = 90°$, segue que os triângulos AES e ADS são congruentes, o que revela que $\overline{ES} = \overline{SD}$ e, consequentemente, $\overline{CS} = \overline{SF}$.



Como os quadriláteros $ABCD$ e $AEFG$ são, por hipótese, quadrados, segue que $m(B\hat{A}D) = m(A\hat{E}F) = 90°$. Assim, temos que

$$m(D\hat{A}E) = 90° - m(E\hat{A}B) = 90° - 50° = 40°.$$

No quadriláreto $AESD$, temos que

$$90° + 90° + 40° + m(D\hat{S}E) = 360° \Rightarrow m(D\hat{S}E) = 140°.$$

Mas, por outro lado, temos

$$m(D\hat{S}E) + m(D\hat{S}F) = 180° \Rightarrow 140° + m(D\hat{S}F) = 180° \Rightarrow m(D\hat{S}F) = 40°.$$

Por fim, como $\overline{CS} = \overline{SF}$, segue que o triângulo CSF é isósceles de base CF, o que revela que $m(S\hat{C}F) = m(C\hat{F}S) = x$. Ora, como o ângulo $D\hat{S}F$ é externo ao triângulo CFS, segue que

$$x + x = 40° \Rightarrow x = 20°.$$

Assim, $m(F\hat{C}D) = m(S\hat{C}F) = x = 20°$. Finalmente, como $\overline{AD} = \overline{AG}$, segue que o triângulo ADG é isósleces de base DG. Logo, $m(D\hat{G}A) = m(G\hat{D}A) = y$. Além disso, temos que

$$m(G\hat{A}D) = m(G\hat{A}E) - m(A\hat{D}S) = 90° - 40° = 50°.$$

Assim, no triângulo ADG temos que: $y + y + 50° = 180° \Rightarrow y = 65°$. Portanto, $m(F\hat{C}D) + m(D\hat{G}A) = 20° + 65° = 85°$, que é a resposta.

PROBLEMA 3

Dois empresários formam uma sociedade cujo capital é de 100 mil reais. Um deles trabalha na empresa três dias por semana e o outro dois. Após um certo tempo, vendem o negocio e cada um recebe 99 mil reais. Qual foi a contribuição de cada um para formar a sociedade?

Solução

Suponha que um deles aplicou x (o que trabalhava 2 dias por semana) e o outro $100 - x$ (o que trabalhava 3 dias por semana). Ora, como cada um deles recebeu 99 mil ao final do negócio, segue que os lucros que cada um deles obtiveram foram

$$99 - x \qquad e \qquad 99 - (100 - x) = x - 1.$$

Por outro lado, os lucros obtidos devem ser proprorcionais aos tempos de trabalho de cada um dos sócios. Assim, temos:

$$\begin{cases} 99 - x &= k \cdot 2 \cdot x \\ x - 1 &= k \cdot 3 \cdot (100 - x) \end{cases}$$

Dividindo-se uma equação pela outra, membro a membro, segue que:

$$\frac{99-x}{x-1} = \frac{k \cdot 2 \cdot x}{k \cdot 3 \cdot (100-x)} \Rightarrow \frac{99-x}{x-1} = \frac{2x}{3 \cdot (100-x)} \Rightarrow$$

$$x^2 - 595x + 29.700 = 0 \Rightarrow x = 55 \ \ ou \ \ x = 540.$$

Observe que a resposta $x = 540$ não faz sentido, pois a soma dos capitais aplicados pelos dois sócios é de apenas 100 mil reais. Portanto, os capitais investidos foram de 55 mil (o que trabalha dois dias por semana) e 45 mil (o que trabalha três dias por semana).

PROBLEMA 4

Preenchem-se as casas de um tabuleiro 8×8 com números reais, de modo que as casas dos quatro cantos do tabuleiro sejam ocupadas com o número 0 e todo número escrito no tabuleiro seja menor do que ou igual a média aritmética de seus vizinhos. Uma casa é vizinha de outra se elas possuem um lado em comum.
Encontre todos os números escritos nas casas do tabuleiro.

Solução

Inicialmente, observe que foram escritos um total de 64 números nas casas do tabuleiro. Deste modo, existe um núumero que é o maior deles. Seja M o maior número dentre todos escritos nas diversas casas do tabuleiro. Como M é o maior número no tabuleiro, todos os seus vizinhos são menores do que ou iguais a ele. Por outro lado, a média aritmética de seus vizinhos é igual a M. A única forma de isto ser possível é se todos os vizinhos de M forem iguais a ele. De modo análogo, podemos concluir que todos os vizinhos dos vizinhos de M são iguais a M também. Daí, concluímos que todos os números escritos no tabuleiro são iguais a M. Como, por hipótese, o número 0 está escrito no quatro cantos do tabuleiro, então $M = 0$, e todo número escrito no tabuleiro é igual a 0.